ゲージ理論の解析力学

菅 野 礼 司 著

吉 岡 書 店

まえがき

以前『微分形式の解析力学』(木村利栄，菅野礼司著) をマグロウヒル出版社から上梓し，その後，それの「改訂増補版」を吉岡書店から再出版した．この本では，微分形式の力学への応用を紹介すると同時に，最後3分の1ほどを，ゲージ理論の解析力学に費やした．しかしながら，微分形式は一般にはまだ馴染みがなく，しかも解説が詳しくなかったので，最後のゲージ理論まで読み進んだ人は少なかったようである．

ゲージ理論は，自然界の4つの基礎的相互作用に関する原理として，素粒子・場の理論など基礎物理学では極めて重要な位置にある．それればかりでなく，相互作用の統一理論や弦理論を始め，今後物理学の基礎理論において，ゲージ理論は大いに活躍するであろう．すなわち，自然の仕組みの本質を認識する手だてとして，枢要な原理の一つとなりうる．従って，ゲージ理論の解析力学を，微分形式を用いずに通常の解析力学の処方で，易しく学生向けに解説することは有意義であると思い，改めて入門書を書くことにした．

解析力学は，古典力学から量子論への移行に重要な役割を果たした．むしろ正準形式の解析力学がなければ量子力学は不可能であったと言える．それゆえ，古典力学のレベルで，ゲージ理論の解析力学を整合的に定式化し，それを完成することはゲージ理論の整合的量子化には不可欠である．

ゲージ理論の力学は，そのラグランジュ関数が特異 (非正則) であるために，拘束条件を内包し正準変数の一部 (一般運動量) が独立でない．それゆえ，ラグランジュ形式とハミルトン形式との1対1対応が必ずしも明瞭でない．そして，従属変数，あるいは拘束条件の整合的処方 (アルゴリズム) を体系的に行う方法が求められていた．その定式化を最初に手掛けたのが，P. G. バーグマンとP. A. M. ディラックである．ディラックは拘束条件のある力学系のハミルトン形式と，ディラック括弧 (ポアッソン括弧に替わる) を定式化して，拘束条件の体系的な取り扱い方を提唱した．これが拘束系に対するディラック理論である．

拘束条件には第1類と第2類の2種類あり，ゲージ理論は第1類拘束条件と結びついている．ディラック理論は，ゲージ理論のみでなく，第2類拘束も含む一般的な拘束系に適用できるものである．さらに，ディラックはゲージ理論に現れる第1類拘束条件の性格と拡張されたハミルトン関数について，いわゆる「ディラックの予想」を

述べた．この正否を巡り，一時期混乱した議論がなされた．

拘束系の力学について，ディラックのやり残した主な問題は，(1) ゲージ変換の生成母関数と第 1 類拘束条件の関係　(2) 第 2 類拘束条件の役割，(3) 位相空間で定式化されたディラック理論を，ラグランジュ形式（速度位相空間）で定式化し，ハミルトン形式（位相空間）との対応をつけること，(4) ディラックの予想を解決する，などであった．

筆者らは，これらの問題に取り組み，主なところをほぼ解決したつもりである．それらの成果を踏まえて，本書をまとめた．前著にもそれら成果を紹介したので，本書の本質的内容は前書の第 8 章以降とかなり重なっている．

第 1 章から第 3 章までを，質点系の作用積分とその変分を中心に，拘束条件のある場合を含めて解析力学の基礎の説明に費やした．第 4 章に初等的正準理論の紹介を，第 5 章で拘束条件のある運動方程式系の積分可能条件について，その導入部を解説した．第 6 章は前章までの質点系の話を，無限自由度の場の理論へ拡張する処方を簡単に述べた．（相対論的場の理論に馴染みのない読者は場の理論の例題は読み飛ばしても先に進めるようになっている．）

それ以降が本書の主目的である拘束系の解析力学である．第 7 章でディラック理論に基づいて，拘束条件の分類とディラック括弧の解説を行った．また，ディラック理論の意義を量子化との関連で解説した．第 8 章では，ゲージ理論における第 1 類拘束条件の役割を述べ，無限小ゲージ変換の生成母関数は第 1 類拘束条件の 1 次結合で表されることと，その求め方を解説した．さらに，第 2 類拘束条件は，通常力学的自由度を縮減する役として理解されているが，その 1 次結合が大域的対称性変換の生成母関数となりうることと，その構成法を示した．第 9 章は，ディラックが定式化した位相空間でのハミルトン形式の理論を，速度位相空間において微分演算子（接空間でのベクトル場）を用いてラグランジュ形式で定式化した．そして，二つの形式の 1 対 1 対応は一部崩れるが相互に移行できることを示した．第 10 章は，ゲージ自由度と第 1 次拘束条件の関係と関連して，ディラックの予想を吟味し，彼の予想は妥当でないことを示した．また，ゲージ固定条件は第 1 類拘束条件と同数必要であり，そして，ゲージ固定条件には時間的定常性が必要であるために，ある種の制限が生ずることに触れた．第 11 章は，第 1 類拘束条件の代数的構造を基礎に，ゲージ群の分類を行った．終章では，物理学におけるゲージ理論の役割と意義について，筆者の思うところを自然観と関連させてて記述した．

参考文献は各章ごとに章末にあげた.

前著『微分形式の解析力学』の共著者であった，先輩木村利栄氏が，2005 年末の旅行中に不慮の事故で急逝された．永らく共に研究を続け，また重力理論や素粒子論の分野で立派な業績を残された氏の急逝は，誠に残念なことであった．生前，本書のような学生向けの解説書を著そうと話し合ったこともあるが，その実現の前に逝かれてしまったことが惜しまれる.

本書を畏兄木村利栄氏の霊に捧ぐ.

目次

まえがき i

第 1 章　解析力学の基礎　1

1.1　解析力学の意義 1

1.2　力学的自由度と拘束条件 3

1.3　最小作用の原理：ハミルトンの原理 6

1.4　両端を動かす拡張された変分 12

第 2 章　ラグランジュ形式とハミルトン形式の同等性　15

2.1　ラグランジュ形式 15

2.2　ハミルトン形式 19

第 3 章　作用積分の不変性と保存則　27

3.1　拡張された変換と作用積分の変分 27

3.2　作用積分の不変性と保存則：ネーターの第 1 定理 30

3.3　保存則の拡張：作用積分の準不変性 32

3.4　ネーターの第 2 定理：任意関数を含む変換 34

第 4 章　正準理論　41

4.1　正準方程式の数学的構造 41

4.2　ポアソン括弧式 42

4.3　ラグランジュ括弧式 45

4.4　正準変換 46

4.5　シンプレクティク変換としての正準変換 50

4.6　微小正準変換 53

4.7　正準変換の不変式 55

第 5 章　運動方程式の積分　59

5.1　運動の決定 59

5.2　運動方程式の積分可能条件：拘束条件のある場合 60

5.3　運動方程式の第 1 積分 72

5.4　ハミルトン-ヤコビ方程式 74

第 6 章　場の理論への拡張　79

6.1　質点系と場の系との対応 79

6.2　変分法 81

第 7 章　拘束系の力学—位相空間—　85

7.1　特異ラグランジュ関数の系とディラックの方法 86

7.2　ディラック括弧による定式化 95

7.3　拘束条件と位相空間の縮減 98

7.4　拘束系の量子化 102

第 8 章　ゲージ理論　107

8.1　ゲージ変換 107

8.2　ゲージ変換の生成子（母関数） 109

8.3　ゲージ変換の母関数はすべて第 1 類拘束の 1 次結合 125

8.4　第 2 類拘束条件と大域的変換 136

第 9 章　位相空間と速度位相空間の対応　153

9.1　位相空間と速度位相空間との相互写像 154

9.2　速度位相空間での定式化 156

9.3　位相空間における定式化との対応 160

9.4　ゲージ不変量 177

第 10 章　ゲージ自由度—ディラックの予想と関連して—　181

10.1　拡張されたハミルトン関数 H_E 形式と H_T 形式の比較 181

10.2　ゲージ固定 192

10.3　ディラック括弧の定常性 201

第 11 章　ゲージ群の分類　205

11.1　ゲージ群 205

11.2　第 1 類拘束条件とゲージ群 207

11.3　ゲージ群の分類 212

終章　ゲージ理論について　217

索引　233

第 1 章

解析力学の基礎

1.1 解析力学の意義

17 世紀にニュートン力学が誕生し，同時にニュートン，ライプニッツによって微分積分学が築かれた．その後，ベルヌーイ兄弟，L. オイラー，ダランベールなど多くの物理学者の協力で，ニュートン力学はその微積分を用いて見事な形式に定式化された．

しかし，ニュートン力学は，経験的，帰納的に見出された力学原理や法則を総合して，いわば発見法的に築かれたので，論理的にすっきりと整備された形式になっていない部分があった．そこで，力学を新たな原理に基づいて，新たな形式に構成し直そうとする動きが現れた．つまり，ニュートン力学の形式とは別に，もっと基本的原理を見出し，その原理を中心にして演繹的に力学理論を再構成しようというものである．力学の再定式化を意識的に始めたのは L. オイラーとダランベールであろう．その研究の流れが，やがてラグランジュやハミルトンらの努力によって，解析力学として開花したのである．

このような動向は，ニュートン力学に限らず，色々な理論の発展段階において，次のステップとして遅かれ早かれ起こるものであるが，力学の場合は，ニュートン力学の形式的整備のなかですでにその芽生えがあった．

ラグランジュの目標は，力学問題の解法を一般的な公式に帰着させ，その公式から問題解決に必要なすべての方程式が与えられるような力学理論を築き，一層見通しのよい統一的理論体系にまとめることであった．その方法は，幾何学から離れて，なるべく図形にたよることなく一貫した解析的方法によるものであった．

解析力学を定式化するための主要な問題は，理論の基礎に据えるべき力学原理を見出すことと，もう一つは数学の変分法の開発であった．力学原理として提唱されたものは，「仮想仕事の原理」と「最小作用の原理」である．仮想仕事の原理は，本書では扱わないが，解析力学の発展過程で重要な役割を果たした．

最小作用の原理は，光に関するフェルマーの原理を粒子の運動に適用したモーペルテューイの原理に始まる．その原理は，粒子の運動経路に沿って積分した作用積分が最小になるというものである．最小作用の原理のより一般的な定式化はラグランジュによってなされ，それによって運動方程式が導かれるようになった．モーペルテューイとラグランジュの最小作用の原理は，変分の途中でエネルギー保存則を仮定したので，それをさらに改良発展させ，今日のような完全な形式に仕上げたのは W.R. ハミルトンである．

こうして築かれた解析力学は，本質的にはニュートン力学の枠内にあり，力学理論としての内容は原理的に新しいものを含まない．しかし，その力学理論の論理形式は画期的なものである．

解析力学の特徴の一つは，座標系の変換を自由に行い，問題の解明に都合のよい一般座標系を用いて記述しうること，しかも一般座標変換によって理論形式が変わらないことである．もう一つの特徴は，ラグランジュ形式とハミルトン形式という二つの同等な理論形式が存在することである．特にハミルトン形式は，独立変数を位置座標とそれに共役な一般運動量をとり，力学系の自由度の２倍の独立変数を用いて，一階の微分方程式で表す．このハミルトン形式は正準形式といわれ，正準変換という，一般座標変換よりもさらに広い変換に対して共変な形式になっている．

力学の論理として注目すべき点は，対象とする力学系のすべての情報は，初期条件などの偶然的（外的）条件を除いて，ラグランジュ関数，またはハミルトン関数という力学的特性関数に含まれているということである．上述のように，ラグランジュ関数やハミルトン関数はもとより，それから導かれる運動方程式は，一般座標変換や正準変換で形を変えない共変形である．このことは，その理論形式が，座標の取り方によらないことを意味している．それゆえ，解析力学はもっとも美しい理論形式の一つである．

そのために，非常に抽象的・普遍的な理論表現が可能になった．だから，後に期せずして，量子力学を築くための物理的かつ数学的理論の基礎になりえたのである．

1.2　力学的自由度と拘束条件

力学系を力学変数を用いて記述するには，その力学系の自由度が非常に重要な概念となる．そして，特に座標変換を行う場合には，その自由度の重要性が一層はっきりする．力学的自由度は，その力学系を特徴づける概念の一つである．

拘束条件 (constraint condition) がない場合，n 質点系の力学的自由度 N は，それら質点が運動する空間の次元数を d とすると，明らかに $N = nd$ である．

たとえば，3 次元空間における n 質点系をデカルト座標で表せば，$3n$ 個の座標 $x^i(i = 1 \sim 3n)$ を用いる．極座標を用いても，自由度の数は当然ながら変わらず，$3n$ である．

拘束条件のない場合の理論形式は単純で，通常の力学書に解説されているので，以下では主として拘束条件のある系を扱う．**ゲージ理論では拘束条件が不可欠な役割を演ずるからである．**

次に，拘束条件のある場合，自由度と拘束条件の数との関係を見ていこう．拘束条件（束縛条件）には，外的条件と内的条件の 2 種類がある．

外的拘束条件と内的拘束条件

外的拘束条件とは，たとえば，質点の運動領域がある曲面上に制限されている場合や，剛体のように質点が互いに強く結合されて質点間の距離が不動である場合のように，力学的条件と離れて幾何学的な条件が力学系に課せられているものである．この拘束条件は，力学系の枠組みとして外から制限を加えるものなので，外的拘束条件と呼ぶことにする．

内的拘束条件とは，ラグランジュ関数の中に拘束条件が陰伏的に入っている場合である．たとえば，電磁気学のマクスウエル方程式のように，その中に力学変数の時間微分が一回のものしか含まない（2 回微分を含まない）方程式がある場合である．そのような方程式はその運動方程式系の拘束条件となる．一般に，力学系の運動を規定する運動方程式の組の中に，時間の 1 回微分しか含まないものが在れば，その力学系は拘束条件を内に含んでいることになる．したがって，そのような運動方程式を導くようなラグランジュ関数は，陰伏的に拘束条件を内包しているわけである．本書の中心的テーマである**ゲージ理論は，すべてこのような内的拘束条件を持つ力学系**なので

ある．

ホロノーム系と非ホロノーム系

拘束条件は一般に微分形で与えられる．力学変数を $x^i(i=1\sim N)$ とすると，拘束条件は次のように表される：

$$\omega_\alpha \equiv a_{\alpha i}(x,t)dx^i + b_\alpha(x,t)dt = 0, \quad (\alpha = 1 \sim k) \tag{1.2.1}$$

ここで α は拘束条件の番号を表す添字で，k は拘束条件の数である．$a_{\alpha i}$ と $b_{\alpha i}$ は x^i と時間 t の関数で，$a_{\alpha i}(x,t)$ は $a_{\alpha i}(x^1,\ x^2,\cdots x^N,t)$ の略記である．**また同一項で上付き添字と下付添字の現れる場合はその添字について和を取るものとする (和記号 $\boldsymbol{\Sigma}$ を省略)**．したがって，上式では i について 1 から N までの和を取る．

ω_α のうちで独立でないものは落とし，ω_α はすべて独立とする．これら ω_α のうちで積分可能なものがあれば，その拘束条件を積分形で表す方が便利なことが多い．そこで，積分可能なものは積分し

$$g_\mu(x,t) = c_\mu, \quad (\mu = 1 \sim m) \tag{1.2.2}$$

と表そう．c_μ は積分定数であり，m は積分可能な拘束条件の数である．積分可能でない残りの拘束条件は

$$\omega_\sigma \equiv a_{\sigma i}(x,t)dx^i + b_\sigma(x,t)dt^i = 0 \quad (\sigma = 1 \sim k-m) \tag{1.2.3}$$

となる．この場合，力学系の拘束条件は (1.2.2) と (1.2.3) で与えられることになり，自由度は $N-k$ である．3 次元空間の中の n 質点系の場合は，当然 $3n-k$ となる．

すべての拘束条件 (1.2.1) がすべて積分可能な場合，つまり $k=m$ のとき，この系をホロノーム系 (holonomic system) といい，積分不可能な拘束条件のある場合を非ホロノーム系という．

ホロノーム系の簡単な例は，1 質点が 2 次元曲面上に束縛されている場合である．

例題 1.1. 曲面上の運動

曲面への法線成分を n_i とすると，質点の運動は法線に垂直であるから，拘束条件は

$$\omega = n_i dx^i = 0 \tag{1.2.4}$$

である．その曲面の方程式を

$$g\left(x^1, x^2, x^3\right) = c \tag{1.2.5}$$

とすると，

$$n_i = \partial g/\partial x^i \tag{1.2.6}$$

である．この (1.2.6) を (1.2.4) に代入すれば，直ちに積分できて (1.2.5) をえる．これが積分形の拘束条件である．したがって，この系の自由度は $3-1=2$ である．

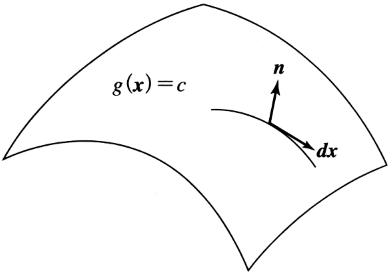


図 1.1

非ホロノーム系の例は，滑らかな平面上を滑らずに転がる球の運動である．

剛体の運動を記述するのに便利なオイラー角を用いて拘束条件を表す [1]．平面上

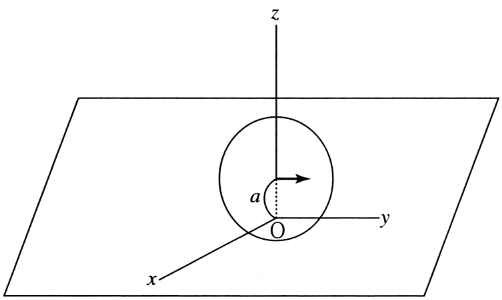


図 1.2

の球の状態を指定するのに，中心の位置 x，y，球の向きを決めるオイラー角 θ，ψ，ϕ の５変数が必要である．半径 a の球が滑らない条件は次の２つである．

$$\omega_1 = dx - a(\cos\phi d\theta + \sin\theta\sin\phi d\psi) = 0 \tag{1.2.7}$$

$$\omega_2 = dy + a(\sin\phi d\theta - \sin\theta\cos\phi d\psi) = 0 \tag{1.2.8}$$

この２つの拘束条件は積分可能でない．その証明は微分形式を用いれば簡単であるが，通常の方法では面倒であり，以下の話しに必要ないので省略する（証明は文献２参照）．

積分可能な拘束条件は，それを用いて拘束条件の数だけの力学変数を消去できるので，力学変数の数を減らすことができる．すなわち，自由度の数を減少できる．

(1.2.2) の拘束条件 $g_\mu(x,t) = c_\mu$ を m 個の x^i について解けば，その m 個の変数を消去できる．ホロノーム系の場合は，$k = m$ 個の拘束条件を用いて，k 個の力学変数（従属変数）を消去し，拘束条件をすべてなくすことができる．

拘束条件による従属変数を消去する便利な方法は，変数を x から一般座標 q に変換し，

$$x^i \quad \Rightarrow \quad q^i$$

k 個の変数 q を

$$q^\mu \equiv g_\mu(x,t) = c_\mu \tag{1.2.9}$$

となるようにするのである．すると，k 個の q^μ は常数になるので，力学変数としての役割は消えて，定数パラメータになる．それゆえ，力学変数は残る $N-k$ 個の q^i のみになる．

本書では，以下特別に断らない限り，ホロノーム系のみを考察の対象とする．

これまでは有限自由度の系について説明したが，場の理論のような無限自由度への拡張は容易である．自由度 N を無限大にするのであるが，その際に自由度を表示する i を，座標 x と場の自由度（種類）に分けて表す．詳細は第６章にまわす．

1.3　最小作用の原理：ハミルトンの原理

最小作用の原理 (principle of least action) は，質点の運動経路に沿った作用積分が最小値（停留値）をとるというもので，この原理を用いて運動方程式を導くことが

できる．ハミルトンの原理はそれを最も完全な形式に定式化したものである．

この節では，解析力学への導入としてハミルトンの原理を簡単に述べる．いま自由度 N の質点系が，空間の 1 点 $P_1(q_1^i, t_1)$ で指定される初期位置から $P_2(q_2^i, t_2)$ で指定される終位置へ運動したとする．この間にこの質点系に作用した力のした仕事を W とし，質点系の運動エネルギーの和を T とする．この系の作用積分 (action integral) を

$$J_c = \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt \tag{1.3.1}$$

によって定義する．T は q^i と $\dot{q}^i = dq^i/dt$ の関数 $T(q, \dot{q})$ であるが，W は話を簡単にするために，q^i のみの関数 $W(q)$ とする．

力が速度に依存する場合は，W も $\dot{q}^i$ の関数となる．そのときも同じようにやれて，以下の話は本質的に変わらない．

この作用積分の値は，1 次元運動の場合以外は，一般的には積分形路に依存するので，積分形路を指定するために，c を付記する．

運動経路 c は運動方程式の解として，初期条件あるいは境界条件，および時間の関数で表される；

$$c : q^i = q^i(t, s_0), \quad (i = 1 \sim N) \tag{1.3.2}$$

(一般座標で表した系の自由度を改めて N とする．)

ここで s_0 は初期条件をまとめて記したものである．関数形 $q^i(t, s_0)$ が決まれば経路 c は決まる．作用積分 J は端点 P_1, P_2 と関数形 $q^i(t, s_0)$ によって指定されるので，J_c の代わりに $J[q]$ と記して，関数形 q^i の依存性を明示することにする．このように被積分関数の関数形に依存する量を汎関数と呼ぶ．

変分法とハミルトンの原理

作用積分から運動方程式を導くための変分法は，端点 P_1, P_2 を固定したまま経路を c から微少だけ変えた経路 c' を考える．このように僅かずらした経路 c' に対応する座標を q' とする：すなわち

$$q'^i(t) = q^i(t) + \delta q^i(t) \tag{1.3.3}$$

ただし，両端は固定するから

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0 \tag{1.3.4}$$

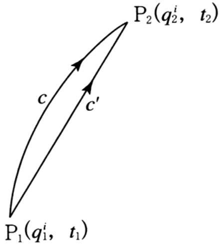


図 1.3

このとき $J[q]$ の変化は

$$\delta \int_{t_1(c)}^{t_2} (T+W)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i} \delta q^i + K_i \delta q^i \right) dt \tag{1.3.5}$$

ただし，K_i は一般化力の成分であって，$\delta W = K_i \delta q^i$ である．また

$$\delta \dot{q}^i = \dot{q}'^i(t) - \dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt} \delta q^i(t) \tag{1.3.6}$$

であるから，(1.3.5) の第 1 項を部分積分し，(1.3.4) を用いると積分項は消えて

$$\delta J[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) + K_i \right\} \delta q^i dt \tag{1.3.7}$$

をえる．

ハミルトンの原理は実現される運動経路 c に対して

$$\delta J[q_c] = 0 \tag{1.3.8}$$

を要請するのである．つまり，「**作用積分 $J[q]$ は，質点系の運動が実現される経路 c の上で停留値をとる**」ということができる．

このように，ハミルトンの原理は，運動を大域的にとらえ，質点の運動経路上で時刻 t_1 における始点 P_1 から時刻 t_2 における終点 P_2 までの作用積分を考え，そして，その経路をわずか変化させた場合の作用積分の変分がゼロになる（作用積分が停留値をとる）ことから，質点系の運動を決定する原理である．

いま問題としている系がホロノーム系であるならば，束縛変数を消去した後では，拘束条件は残っていないので δq^i はすべて独立である．それゆえ，(1.3.7) と (1.3.8)

とから，直ちにそれぞれの δq^i の前の $\{\quad\}$ の中をゼロと置いて運動方程式が得られる．

ホロノーム系にしろ，非ホロノーム系にしろ，拘束条件 (1.2.1) があるとき (一般座標を用いてホロノーム拘束条件を除いたときは (1.2.3) のみ)，δq^i はすべて独立にはとれないので，δq^i の係数因子を直ちにゼロと置くことはできない．そこで，このような場合の常套手段として，ラグランジュの未定係数法を用いるのがよい．

このとき留意すべきことは，最小作用の変分は時間を止めた仮想変位であるから，(1.2.1) で $dt=0$ とした式 (x を q で置き換え)

$$a_{\alpha i}(q,t)\delta q^i = 0, \quad (\alpha = 1 \sim k) \tag{1.3.9}$$

を用いるべきである．したがって，未定係数 λ^α をこれに乗じた

$$\lambda^\alpha a_{\alpha i}(q,t)\delta q^i = 0$$

を (1.3.7) に加える．すると，λ^α を巧く選べば，k 個の δq^α の係数因子をゼロにすることができるので，残る $N-k$ 個の独立な δq^i の係数因子をゼロと置くことができる．こうして，結局すべての δq^i の係数因子をゼロと置けるわけである．

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}i}\right) - \frac{\partial T}{\partial qi} = K_i + \lambda^\alpha a_{\alpha i} \tag{1.3.10}$$

を得る．これが拘束条件のあるときの運動方程式である．最後の $\lambda^\alpha a_{\alpha i}$ は拘束条件から出たのであるから，束縛力である．

ラグランジュ方程式

K_i が，特にポテンシャル $U(q)$ から導かれるときは

$$K_i = -\partial U/\partial q^i \tag{1.3.11}$$

である．そこでラグランジュ関数 L を導入して

$$L(q,\dot{q},t) = T - U \tag{1.3.12}$$

とおくと，(1.3.1)，(1.3.7) および (1.3.10) は，それぞれ

$$J_c = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1.3.13}$$

$$\delta J[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial qi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}i}\right) \right\} \delta q^i dt = 0 \tag{1.3.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}i}\right) - \frac{\partial L}{\partial qi} = \lambda^\alpha a_{\alpha i} \tag{1.3.15}$$

となる．言うまでもなく，ホロノーム系で，拘束条件を消去した $L(q, \dot{q}, t)$ に対しては，(1.3.15) の右辺は 0 である．この方程式はオイラー-ラグランジュ方程式，あるいは，単にラグランジュ方程式と呼ばれる．この運動方程式は当然ながら時間に関する２回微分方程式である．

これまでハミルトンの原理からラグランジュ方程式を導いたが，逆にラグランジュ方程式に従う経路に対し，作用積分が停留値をとることは明らかである．

ラグランジュ関数の不定性

ラグランジュ方程式を導くハミルトンの原理は，作用積分の両端 P_1，P_2 を固定した変分であるから，ラグランジュ関数 L に任意関数 F の時間による全微分 $dF(q)/dt$ を加えても，ラグランジュ方程式に寄与しない．ラグランジュ関数は q の高階微分は含まないとしているから，F は q のみの関数とする．すると

$$J' = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{dF}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(t_2) - F(t_1) \tag{1.3.16}$$

ゆえ，両端は固定しているので F は変分を受けないからである．この付加項は系のハミルトン関数にも影響を与えないことは次章に示す．

したがって，**ラグランジュ関数には時間による全微分項の不定性がある**ことに留意すべきである．

作用積分の最小と停留値について

ここで「最小作用の原理」について，留意すべきことがある．ハミルトンの原理を「最小作用の原理」というのは，必ずしも正しくない．厳密には，上記のように，作用積分が停留値をとる，つまり「停留値原理」とでも言うべきである．なぜならば，$\delta J[q] = 0$ は極大，あるいは極小条件を与えるとは限らないからである．変分をパラ

メータ表示したとき，鞍点のように，ある方向の変分に対しては極小になっても，他の方向の変分では極大になることがある．また，もう一つの理由は，たとえば，球面上の運動において，P_1，P_2 を結ぶ大円の弧に沿って運動が実現されるとき，大円の弧は図のように短いもの c_1 と長いもの c_2 の２つある．c_1 上で $J[q]$ は最小であるが，c_2 上では最大でも最小でもない停留点である．

したがって，作用積分を局所的に限定したときのみ最小になりうる．

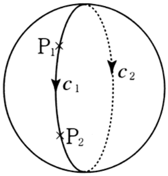


図 1.4

ハミルトンの原理（あるいは最小作用の原理）の意義について，一言付け加えておく．

ハミルトンの原理の定式化において，２点 P_1，P_2 を固定し，その２点を通る経路について作用積分を定義したが，それは運動方程式が時間の２階微分であることと密接に関係している．この運動方程式の解に入ってくる２つの積分定数（各自由度ごとに２つ）は，２つの独立な初期条件，または境界条件における位置と速度の代わりに，時刻 t_1，t_2 における２つの位置 P_1，P_2 を指定してもよい．したがって，定まった２つの時刻における２位置を固定すれば運動の軌道が決まるので，このような定式化が可能なのである．通常の質点力学系で，ラグランジュ関数 L を位置座標 q と速度 $\dot{q}$ のみの関数に限定するのは，運動方程式を２回微分にするためである．もし，L が q の２階の時間微分 $\ddot{q}$ を含むときは，２点 P_1，P_2 における δq ばかりでなく，その点における速度の変分 $\delta\dot{q}$ も固定してその変分も０としなければならない．その場合，運動方程式は一般に４階微分方程式になる．本書では高階微分のラグランジュ関数は扱わない．(高階微分の理論については，文献２を参照.)

ハミルトンの原理から，運動方程式が導かれるということは，運動の全過程 (P_1 から P_2 までの作用積分) が運動の部分過程を規定することを意味する．つまり，全体が部分を規定する．逆に，運動方程式を満たす経路に対して，作用積分が最小になる

(停留値をとる）から，部分が全体を規定する．このように，ハミルトンの原理は全体と部分の関係を明らかにするもので，全体を構成要素に分解する通常の分析的方法とは異質の解析法である．

1.4 両端を動かす拡張された変分

前節のハミルトンの原理では，運動方程式を導くにあたって，両端を固定した変分を行ったが，両端を固定せずに動かす拡張された変分を考えることにする．すると，ラグランジュ方程式以外の力学的情報が作用積分から得られる (3)．

作用積分の端点の時刻 t_1，t_2 を動かし，しかも t_1，t_2 での変分 $\delta q^i(t_1)$ と $\delta q^i(t_2)$ をも 0 としない一般的変分を考えよう．両端の近くでの q^i の変分 δq^i は q^i の関数形自体の変分 $\bar{\delta} q^i$ と t の変分からの寄与の和となる；

$$\delta q^i(t) = \bar{\delta} q^i(t) + \dot{q}^i(t)\delta t, \quad (i = 1 \sim N), \tag{1.4.1}$$

ただし，P_1，P_2 の近傍以外の中間領域では q^i の変分は $\bar{\delta} q^i(t)$ のみとする．

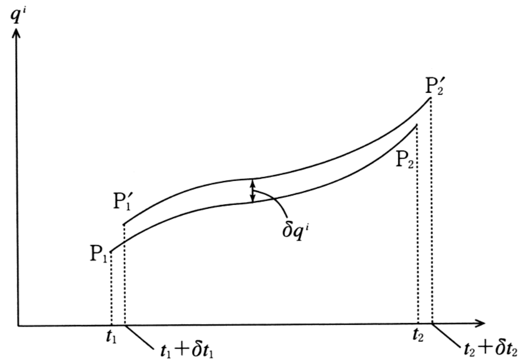


図 1.5　拡張された変分

この変分に対して $\delta J[q]$ の変化は

$$\delta J[q] = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} dt L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \tag{1.4.2}$$

となる．これを変形して，２次以上の微少量を無視すると

$$\delta J[q] = \left\{ \int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \right\} L(q, \dot{q}, t)dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L\left(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t\right) - L\left(q, \dot{q}, t\right) \right\}$$
$$= L(q_2, \dot{q}_2, t_2)\delta t_2 - L(q_1, \dot{q}_1, t_1)\delta t_1 + \bar{\delta} \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (1.4.3)$$

を得る．右辺第１，２項は積分領域が微小なので，L の変数 $q^i + \delta q^i$ などを q^i とした．前節の 時間を止めた変分 δ はここの $\bar{\delta}$ と同じである．したがって，この式の最終項は前節と同様に計算される．

$\bar{\delta} q^i(t)$ は時間 t を止めた変分であるから，

$$\bar{\delta} \dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt} \bar{\delta} q^i(t) \qquad (1.4.4)$$

が成り立つ．よって，部分積分ができるので，(1.4.3) は

$$\delta J[q] = \left[L(q, \dot{q}, t)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \bar{\delta} q^i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right\} \bar{\delta} q^i \qquad (1.4.5)$$

となる．これが拡張された変分の一般式である．

上式の第２項はラグランジュ方程式を用いると消えるので，運動の経路 c 上では

$$\delta J[q]_c = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q} i} \delta q^i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q} i} \dot{q}^i - L \right) \delta t \right]_{t_1}^{t_2} \qquad (1.4.6)$$

が成り立つ．ただし，上式では (1.4.1) を用いた．

(1.4.6) は次のことを示している．運動経路 c 上での作用積分の変分は，積分の中間領域には依存せず，境界値のみで決まる．つまり，$\delta J[q]_c$ は積分可能であることを示している．したがって，作用積分の汎関数変分が積分可能であるための必要十分条件は，その積分路上でラグランジュ方程式が成り立つことである．

そこで，

$$\Theta(t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q} i} \delta q i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q} i} \dot{q}^i - L \right) \delta t \qquad (1.4.7)$$

とおくと

$$\delta J[q]_c = \Theta(t_2) - \Theta(t_1) \qquad (1.4.8)$$

と書ける．Θ は以後の理論展開で，重要な役割を果たす変分である．

ハミルトンの正準理論は次章で詳しく論ずるが，よく知られているように，正準形式では一般化運動量 p_i は (1.4.6) の δq^i の係数で

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{1.4.9}$$

によって与えられる．この p_i は q^i に共役な運動量と呼ばれる．

また，ハミルトン関数 H（次章で述べるように，系のエネルギーを表す）は (1.4.7) の δt の係数因子

$$H(q,p) = p_i\dot{q}^i - L \tag{1.4.10}$$

で定義される．H は正準変数 q^i，p_i の関数として定義されるが，その p_i を $q^i, \dot{q}^i$ で表したものが Θ の表式の中の δt の係数である．そこで，

$$\Theta(t) = p_i(q,\dot{q})\delta q^i - E(q,\dot{q})\delta t \tag{1.4.11}$$

と表すことにする．ただし，

$$E(q,\dot{q}) = p_i(q,\dot{q})\dot{q}^i - L(q,\dot{q}) \tag{1.4.12}$$

であり，Θ はラグランジュ形式での量を意味する．それに対して，ハミルトンの正準形式では

$$_*\Theta = p_i\delta q^i - H(q,p)\delta t \tag{1.4.13}$$

と表される*)．ここで q^i と p_i は独立変数である．力学的自由度 N の２倍の独立変数 q^i と p_i で張られる $2N$ 次元空間を位相空間という．

以下では，Θ と $_*\Theta$ を基本変分式と呼ぶことにする．

参考文献

(1) オイラーの角については，山内恭彦『一般力学』(岩波書店)．

(2) 木村・菅野『微分形式の解析力学』(吉岡書店)．

(3) ゲリファント・フォーミン；関根智明訳 (文一総合出版)『変分法』．

---

*) 速度位相空間と位相空間で物理量を同じ記号で表す場合，位相空間の量であることを示すために，左下に＊印つけることにする．

第 2 章

ラグランジュ形式とハミルトン形式の同等性

2.1 ラグランジュ形式

解析力学の２つの形式，すなわちラグランジュ形式とハミルトン形式についてその特徴を述べ，両者の関係を考察するのが本章の目的である*)．

まず，ラグランジュ形式から始める．ラグランジュ形式は独立変数として一般座標 q^i を用いて記述されるが，ラグランジュ関数 L は q^i と $\dot{q}^i$ で表される．そして，外的拘束条件のない場合は，ラグランジュの運動方程式は前節で述べたように

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (i = 1 \sim N) \tag{2.1.1}$$

である．これは q^i の時間に関する２回微分方程式であり，一般には N 個の独立な方程式系である．したがって，これらの方程式を解いて運動を求めるとき，初期値 q^i と $\dot{q}^i$ の両方を指定して運動が一義的に決定される．すると，力学系の状態を指定するのは q^i と $\dot{q}^i$ であるといえるから，q^i と $\dot{q}^i$ とを変数とする空間を考えると都合がよい．**このような $2N$ 次元空間を状態空間，あるいはハミルトン形式の位相空間（phase space）と対応させて，速度位相空間（velocity phase space）という．**

そこで，速度位相空間の座標を（q^i, ξ^i）で表すことにする．ξ^i は速度 $\dot{q}^i$ に対応する変数であるが，ξ^i は一応 q^i とは別ものとして扱い，q^i の時間微分である $\dot{q}^i$ と区別

注*）本章以下，ラグランジュ関数 L およびハミルトン関数 H は時間を陽に含まないとする．時間に顕わに依存する場合も，$\partial L/\partial t$ の付加項が付くだけで，以下の考察は本質的に変わりはない．

する．したがって，q^i によって配位空間のすべての点を表し，ξ^i によって速度空間の点を表すものとする．質点の現実の運動では，各時刻ごとに q^i の値と $\dot{q}^i = \xi^i$ の値とが決まっているから，運動は速度位相空間内の1本の曲線で表される．この曲線を速度位相空間における運動の経路と呼ぶことにする．

そこで，ラグランジュ関数 $L(q^i, \dot{q}^i)$ を速度位相空間で定義された関数 $L(q^i, \xi^i)$ と読み換えて，そこでのラグランジュ方程式を

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L(q,\xi)}{\partial \xi^i}\right) - \frac{\partial L(q,\xi)}{\partial q^i} = 0, \quad (i = 1 \sim N) \tag{2.1.2}$$

と表そう．だが，この式だけでは ξ^i と $\dot{q}^i$ の関係が与えられていないので，さらに

$$\xi^i = \dot{q}^i, \quad (i = 1 \sim N) \tag{2.1.3}$$

を付け加える．これら (2.1.2) と (2.1.3) の $2N$ 式を合わせると，ラグランジュ方程式と同値になる．この方法は，力学変数を2倍にして，2回微分方程式を1回微分方程式に直すハミルトン形式と似ている．

ラグランジュ方程式 (2.1.1) は位置座標空間（配位空間）では

$$A_{ij}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{2.1.4}$$

となる．ここで $\ddot{q}^j$ の係数

$$A_{ij}(q, \dot{q}) \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = A_{ji} \tag{2.1.5}$$

はヘッシアン行列と呼ばれるもので，i，j について対称である．このヘッシアン行列は内的拘束条件の存在と密接に関わっている．

ラグランジュ方程式とこのヘッシアン行列を速度位相空間で表すと次のようになる：

$$A_{ij}\dot{\xi}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j}\xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{2.1.6}$$

$$A_{ij}(q^i, \xi^i) = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \tag{2.1.7}$$

ヘッシアン行列 A_{ij} は，ポテンシャルが速度に依存しない通常の力学系では定数行列であるが，速度依存ポテンシャルのような非線形力学系の場合などでは，一般に $q^i, \dot{q}^i$（すなわち q^i, ξ^i）の関数である．

いずれにせよ，ラグランジュ関数の中に $q^i, \dot{q}^i$（すなわち q^i, ξ^i）がどのような形で含まれるかによって N 個のラグランジュ方程式の具体的な形は異なるが，すべての変数 q^i および $\dot{q}^i$（q^i および ξ^i）は形式的にはまったく対称的に扱われるので，見通しのよい議論ができる．しかも，**L が決まれば，運動方程式は自動的に書き下せるから，問題とする系の力学的情報はすべて L の中に含まれていることになる．つまり，ラグランジュ関数は力学系の特性を表す特性関数である．**

次に，ヘッシアン行列の性質と拘束条件の関係を見よう．

ヘッシアン行列が正則，つまりその行列式が0でなければ，N 個のラグランジュ方程式は運動方程式としてすべて独立である．なぜならば，ヘッシアン行列はラグランジュ方程式の $\dot{\xi}^i$（つまり $\ddot{q}^i$）の係数のつくる行列ゆえ，ラグランジュ方程式のすべての式は独立な運動方程式となるからである．すなわち

$$\det(A_{ij}) \neq 0 \tag{2.1.8}$$

ならば，その逆行列 $(A^{-1})^{ij}$ が存在する．それゆえ，ラグランジュ方程式 (2.1.4) あるいは (2.1.6) に左から $(A^{-1})^{ij}$ を乗じて，$\dot{\xi}^i$（すなわち $\ddot{q}^i$）について解くことができる：

$$\dot{\xi}^i + (A^{-1})^{ij}\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^j \partial q^k}\xi^k - (A^{-1})^{ij}\frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \tag{2.1.9}$$

これから，N 個の方程式は運動方程式としてすべて独立であることが分かる．通常の質点力学系でラグランジュ関数が運動エネルギーとポテンシャルからなる場合は，ヘッシアン行列は正則である．

だが，(A_{ij}) が非正則（特異），すなわち

$$\det(A_{ij}) = 0 \tag{2.1.10}$$

の場合，ヘッシアン行列の逆は存在しないので，(2.1.9) のように，$\dot{\xi}^i(\ddot{q}^i)$ について解くことがでない．N 個の方程式を巧く組み合わせてその1次結合をつくると，$\dot{\xi}^i$ を消去した式が導かれる．$\dot{\xi}^i(\ddot{q}^i)$ を含まないそのような式は，運動方程式というよりも，むしろ拘束条件を与える式である．

それゆえ，**ヘッシアン行列が非正則なときは，内的拘束条件が存在する**ということになる．つまり，ラグランジュ関数が拘束条件を内包しているわけである．そのようなラグランジュ関数は非正則（特異）であるという．

例題 2.1. 簡単な例で示そう．非正則（特異）ラグランジュ関数として

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}(\dot{q}^1)^2 + q^1\dot{q}^2 + (q^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}(\xi^1)^2 + q^1\xi^2 + (q^2)^2
\end{aligned} \tag{2.1.11}
$$

を考える．この場合，ヘッシアン行列は

$$
(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.12}
$$

であり，その階数（rank）は 1 である．：ラグランジュ方程式は

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}^1 - \xi^2 = 0, &\quad (\ddot{q}^1 - \dot{q}^2 = 0) \\
\xi^1 - 2q^2 = 0, &\quad (\dot{q}^1 - 2q^2 = 0)
\end{aligned} \tag{2.1.13}
$$

この第 2 式は $\dot{\xi}^1$ も $\dot{\xi}^2$ を含まないから，拘束条件である．この拘束条件は外部条件から現れたものでなく，ラグランジュ関数の性質から生じたものであるから，内的拘束条件である．

内的拘束条件のある力学系でよく知られたものは，電磁気学のマクスウエル方程式である（例題 8.2 参照）．

一般に，ヘッシアン行列の階数が $N - R$ のとき：

$$
\mathrm{rank}(A_{ij}) = N - R
$$

(A_{ij}) は R 個のゼロ固有値を有し，それに対応して R 個のゼロ固有値ベクトル τ^i_α が存在する．

$$
A_{ij}\tau^j_\alpha = \tau^j_\alpha A_{ji} = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{2.1.14}
$$

A_{ij} も τ^j_α も通常の単純な力学系では定数であるが，一般的には ξ^i と q^i の関数である．

それゆえ，この τ^i_α をラグランジュ方程式 (2.1.4) または (2.1.6) に左から乗じ i について和をとれば，$\dot{\xi}^i(\ddot{q}^i)$ の項は消えるので，R 個の $\dot{\xi}$ を含まない式が得られる．したがって，このラグランジュ方程式系は運動方程式として独立ではなく，R 個の拘束条件を含むことになる．

その拘束条件を Φ_α で表す．(2.1.6) からΦ_α として次式を得る．

$$\Phi_\alpha(\xi, q) = \tau^i_\alpha \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j} \xi^j - \frac{\partial L}{\partial q i} \right) = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{2.1.15}$$

この拘束条件は q^i と ξ^i の関係式であるから，R 個の ξ^i は独立でない．

拘束条件の性質とその役割に関する詳しい考察は，第 7 章で行う．

2.2　ハミルトン形式

ラグランジュ形式でも，ξ^i を独立変数のように扱うと，ラグランジュ方程式は速度位相空間において，$2N$ 個の 1 回微分方程式となることが理解された．しかし，数学の問題として 2 回微分方程式を 1 回微分方程式に書き直すだけなら，変数の選び方は ξ^i に限らずいくらでもある．力学理論を美しく表現し，見通しよくするためには，q^i に共約な一般化運動量 p^i を独立変数に取るのがよい．q^i と p^i を独立変数として，力学を定式化したものがハミルトン形式である．

正準変数

すでに，第 1 章で導いた基本変分式 (1.4.13)

$${}_*\Theta = p_i \delta q^i - H(q, p)\delta t \quad (\text{左下}*\text{印は位相空間の量を表す})$$

において，変分 δq^i の係数がその p_i であった．ここに p_i は (1.4.9) で定義された

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L(q, \xi)}{\partial \xi^i} \tag{2.2.1}$$

である．この q^i と p_i を互いに正準共役な変数といい，両方をまとめて正準変数という．そして，q^i と p_i の張る $2N$ 次元空間を位相空間という．

独立変数として p_i を取らねばならない絶対的理由はないが，こうすると q^i と p_i が対称的になり，きれいな形式が得られる．さらにもう一つの理由は，次に示すように，基本変分式 ${}_*\Theta$ の第 2 項のハミルトン関数 H の性質によるものである．

H は (1.4.10) で次のように定義された

$$H(q, p) = p_i \xi^i - L(q, \xi) \tag{2.2.2}$$

この式の微分を取ると

$$dH = p_i d\xi^i + \xi^i dp_i - \frac{\partial L(q, \xi)}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \xi^i} d\xi^i$$

となる．ここで p_i の定義 (2.2.1) を用いると，第 1 項と最後の項は打ち消して

$$dH = \xi^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i \tag{2.2.3}$$

を得る．さらに (2.2.1) を ξ^i について解いて，ξ^i を q^i と p_i で表そう：

$$\dot{q}^i = \xi^i = u^i(q, p) \tag{2.2.4}$$

この ξ^i の式を (2.2.3) に代入すれば，(2.2.3) の右辺は q^i, p_i のみで表される．そして，(2.2.3) では $d\xi^i$ は消え，微分は dq^i と dp_i のみになったことから分かるように，H は本質的に q^i と p_i で表される量であることを意味する．これが力学変数として p_i をとる理由である．

L の不定性と H の関係

さきに 1.3 節で指摘したように，L には時間による全微分の項を加えてもラグランジュ方程式には影響がない，つまり L には不定性があった．その付加項 dF/dt は H にも寄与しないことを吟味しておく必要がある．

$$L' = L + \frac{dF(q)}{dt} \tag{2.2.5}$$

とおき，L' からハミルトン関数を求めてみよう．F は ξ^i によらないとした．

$$p'_i = \frac{\partial L'(q,\xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial L(q,\xi)}{\partial \xi^i} + \frac{\partial F}{\partial qi}$$

これより，L' から導かれるハミルトン関数 H' は

$$\begin{aligned} H' = p'_i \xi^i - L' &= \left(p_i + \frac{\partial F}{\partial qi} \right) \xi^i - L - \frac{\partial F}{\partial qi} \xi^i \\ &= p_i \xi^i - L = H \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

となる．このように，L と L' とは同じハミルトン関数を与える．それゆえ，L には時間による全微分項の不定性がある．

ハミルトン形式における拘束条件

本節の議論で留意すべきことがある．ヘッシアン行列は

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j} \tag{2.2.7}$$

であるから，A_{ij} が正則の場合は，すべての p_i は ξ^i について独立関数である（q は無視して ξ のみに着目する）．それゆえ，(2.2.1) を ξ^i について逆に解くことができて，(2.2.4) は一義的に決まる．

しかし A_{ij} が非正則の場合には，(2.2.7) から分かるように，p_i は ξ^i に関して独立関数ではないので，p_i の間に関係がつく．それはすなわち，p_i に関する拘束条件である．このことは，ラグランジュ形式において，A_{ij} が非正則の場合には拘束条件 (2.1.15) があることからも推測できる．それゆえ，(2.2.1) は ξ^i について一義的には解けず (2.2.4) の関数 u は不定である．なぜならば，(2.2.1) の中で $N-R$ の p_i は ξ^j について独立関数であるから，$N-R$ 個の $\xi^k(k=1\sim N-R)$ について解くことができる．ただし，その表式には p，q ばかりでなく，R 個の $\xi^\alpha(\alpha=1\sim R)$ が含まれ，その ξ^α は不定のまま残るからである．そして，残る R 個の p_α の表式の中にその $\xi^k(p_i,\xi^\alpha)$ を代入すると，ξ^α は消えて p_i の関係式（一般には q^i も含む）を得るのである．それが位相空間での拘束条件である．

それを模式的に表すと

$$\left\{\begin{array}{l} p_k=p_k(\xi,q) \\ p_\alpha=p_\alpha(\xi,q) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \xi^k=u^k(p,q,\xi^\alpha) \quad \text{この}\xi^k\text{を } p_\alpha\text{の}\xi^k\text{に代入} \\ p_\alpha=p_\alpha(\xi^k,\xi^\alpha,q) \end{array}\right.$$
$$\to p_\alpha=p_\alpha(u(p,q,\xi^\alpha),\xi^\alpha,q)=p_\alpha(p_k,q)\to {}_*\Phi_\alpha(p,q)=0$$

拘束条件の数は，ラグランジュ形式においても，ハミルトン形式においても，**ヘッシアン行列の階数が N-R のとき，ヘッシアン行列に付随して生ずる拘束条件はともに R 個である．**

そのハミルトン形式での拘束条件を

$$ {}_*\Phi_\alpha(p,q)=0, \quad (\alpha=1\sim R) \tag{2.2.8}$$

と表すことにする．

このような拘束条件のある場合でも，H は本質的に q^i と p_i で表される量であることに変わりはない．なぜならば，(2.2.3) を導くにあたり，拘束条件は関係ないからである．

ただし，拘束条件のあるとき，ハミルトン関数を与える (2.2.2) には問題が残る．右辺の ξ^i のうち，R 個の ξ^α は q^i,p_i で一義的に表されず不定なので，右辺を q^i,p_i のみで表すことができないからである．この場合 ξ^α を不定のまま残して任意関数としておくことも可能である．しかし，それでは R 個の ξ^α や p_α を特別扱いすること

になり，形式的に醜い．そこで，すべての q^i, p_i を対称的に扱う方法をディラックが考案した．その方法に付いては，「第７章　拘束系の力学」のところで述べる．

例題 2.2. 拘束条件のある系のハミルトン形式

ラグランジュ関数として

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1 - \xi^2)^2 - \xi^1 q^2 - \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 \tag{2.2.9}$$

を取ろう．ヘッシアン行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

その階数は 1 であるから，この系には 1 個の拘束条件がある．

正準運動量は

$$\begin{aligned} p_1 &= \xi^1 - \xi^2 - q^2 \\ p_2 &= \xi^2 - \xi^1 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

これより明らかなように，ξ^1 と ξ^2 を同時に p で表すことはできないから，ξ^1 か ξ^2 のうちの 1 つは不定である．

この２式より ξ を消去して，次の拘束条件を得る．

$${}_*\Phi = p_1 + p_2 + q^2 = 0 \tag{2.2.12}$$

ここで上式の p_1, p_2 を q と ξ で表すと ${}_*\Phi$ は恒等的にゼロとなることを指摘しておく．このように位相空間の ${}_*\Phi$ が，速度位相空間で消えるこの性質は一般的に成り立つ（後述）．

ハミルトン関数は，ξ^1 を不定のまま残した表式を求めると，

$$\begin{aligned} H &= p_1\xi^1 + p_2\xi^2 - L \\ &= p_1\xi^1 + p_2(p_2 + \xi^1) - \frac{1}{2}(p_2)^2 + \xi^1 q^2 + \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(p_2)^2 + (p_1 + p_1 + q^2)\xi^1 + \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(p_2)^2 + \xi^1{}_*\Phi + \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

となる．

このように，ハミルトン関数は不定な変数 ξ^1 を含み，正則系のように旨くいかない．しかし，重要な点は，その ξ^1 の因子が拘束条件になっていることである．それゆえ，ξ^1 はラグランジュの未定係数と同じなのである．この事実を利用して，すべての変数を対等に扱う体系的な方法をディラックが開発したのである．

例題 2.3.　ヘッシアン行列の階数が $N-R$ となる例

ラグランジュ関数の中の ξ のうちで，$R+1$ 個の $\xi^\beta(\beta=1\sim R+1)$ が一塊りになって，関数 $f(\xi^1,\cdots\xi^{R+1})$ として含まれているとき，ヘッシアン行列の階数は $N-R$ となる．

このとき $R+1$ 個の ξ^β は，あたかも 1 変数のようにみなすことができるので，R 個の $\xi^\alpha(\alpha=1\sim R)$ は独立変数の資格はなくなるからである．すなわち

$$p_\beta(\xi,q)=\frac{\partial L}{\partial\xi^\beta}=\frac{\partial L}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^\beta},\quad(\beta=1\sim R+1)$$
$$A_{i\beta}=\frac{\partial p_i}{\partial\xi^\beta}=\frac{\partial p_i}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^\beta}=A_{\beta i}$$

であるから，$A_{i\beta}$ の縦の列には共通因子 $\partial f/\partial\xi^\beta$ がつくので，括り出せる．すると横の行は，最初の $R+1$ 行の各 i 行には同じ $\partial p_i/\partial f$ が並ぶゆえ，最初の R 列は 0 にできて階数は R だけ下がる．

A_{ij} は対称行列であるから，右上の R 行も同様に 0 にできる．それゆえ，このヘッシアン行列の階数は $N-R$ となる．

ルジャンドル変換

力学変数 $q^i,\xi^i=\dot{q}^i$ とラグランジュ関数 L から，変数 q^i,p_i とハミルトン関数 H への変換は，2 つの式 (2.2.1) と (2.2.2) で与えられる．この変換をルジャンドル変換という．

この逆変換 q^i,p_i と H から $q^i,\xi^i=\dot{q}^i$ と L への変換もルジャンドル変換と呼ばれている．このルジャンドル変換は，L が与えられれば，自動的に決まる．

$$\text{ルジャンドル変換: }(q^i,\xi^i,L)\Leftrightarrow(q^i,p_i,H)$$

ハミルトンの正準方程式

ハミルトン形式での運動方程式を導こう．(2.2.3) の右辺第 2 項をラグランジュ方程式 (2.1.2) を用いて書き変えると

$$dH(p,q) = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i \tag{2.2.14}$$

となる．これより

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial qi} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 \sim N) \tag{2.2.15}$$

を得る．これは力学変数 q^i と p_i の時間変化を与えるものであるから，運動方程式である．これをハミルトンの正準方程式，あるいは単に正準方程式という．

このように，ハミルトン形式での運動方程式は H により完全に決まる．それゆえ，H はラグランジュ形式における L と同様の役目をする力学的特性関数である．

位相空間と変分原理

周知のように，力学系の状態は，その中に含まれる質点の位置と速度を同時に決めれば決まる．ハミルトン形式では，速度の代わりに運動量を用いて表す．

$2N$ 次元位相空間の中の一点 (q^i, p_i) を指定すれば状態は決まる．(q^i, p_i) の値は時間とともに変化するから，力学系の運動は位相空間の中の曲線で表される．それを状態曲線と呼ぼう．

拘束条件のある場合は，その拘束条件によって許される状態は制限されるので，位相空間の中で状態曲線の動きうる範囲は制限を受ける．たとえば，R 個の拘束条件があるとき，状態曲線の動く範囲は位相空間の中の $2N - R$ 次元空間（超曲面）内に限られる．

正準方程式は，位相空間における最小作用の原理からも導くことができる．ただし，この場合の変分は，q^i, p_i ともに独立変数として変分するので，ラグランジュ形式の変分とは異なるものである．

作用積分の中の L は，位相空間では次のようになる：

$$L = p_i \dot{q}^i - H(q,p) \tag{2.2.16}$$

位相空間の 2 点 $P_1(q_1, p_1, t_1)$，$P_2(q_2, p_2, t_2)$ を結ぶ作用積分は

$$J[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H)dt \tag{2.2.17}$$

である．この変分 $\delta J = 0$ から正準方程式が導かれる．この作用積分に対して，両端を固定した変分を行う．

$$\delta J[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \delta\dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right) dt = 0$$

例により，第 1 項は $\delta\dot{q}^i = d(\delta q^i)/dt$ を用いて，部分積分を行い，積分された項 $p_i \delta q^i(t_1)$ と $p_i \delta q^i(t_2)$ は境界条件（両端を固定した変分）によりゼロである．よって

$$\delta J[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial qi} \right) \delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right\} dt = 0 \tag{2.2.18}$$

を得る．δq^i，δp_i は独立変分であるから，それらの係数因子をゼロとおくことにより正準方程式 (2.2.15) が得られる．

拘束条件 ${}_*\Phi_\alpha = 0$ のある場合は，δq^i と δp_i は独立ではないので，未定係数法を用いて正準方程式を導かねばならない（後述）．

ハミルトン関数とエネルギー

ハミルトン関数 H は運動方程式を与える重要な特性関数であるが，同時に，その力学系のエネルギーを表す物理量である．

通常の質点力学系で，ラグランジュ関数 L が運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の差で表されるとき，H はその力学系のエネルギーとなる．

質点系の運動エネルギー T は $\dot{q}^i$ の斉 2 次形式である．直行座標では $\Sigma(\dot{x}^i)^2/2$ となる．それゆえ

$$p_i \dot{q}^i = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i = 2T$$

である．よって

$$H = p_i \dot{q}^i - L = 2T - (T - V) = T + V \tag{2.2.19}$$

のように H は力学系のエネルギーである．

L が時間を陽に含まなければ，H も時間によらない．それゆえ，H が保存量であることは，正準運動方程式 (2.2.15) を用いて簡単に示される

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$$
$$= -\dot{p}_i\dot{q}^i + \dot{p}_i\dot{q}^i = 0 \qquad (2.2.20)$$

以上述べたいくつかの事から分かるように，少なくともヘッシアン行列が正則で拘束条件のないときは，ラグランジュ形式とハミルトン形式とは 1 対 1 の対応がつき，ルジャンドル変換によって互いに結ばれている．そして，両者は形式こそ違え，本質的には同等である．拘束条件のある特異ラグランジュ関数の場合も，力学理論の内容としては同等であるが，形式的には少し異なるところがある（第 7 章以降参照）．

参考文献

(1) E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, Classical Dynamics: A Modern Perspective, John Wiley & Sons.

第 3 章

作用積分の不変性と保存則

第 1 章で，作用積分の変分からラグランジュ方程式や基本変分形式を導いた．その際，作用積分の両端で，変分に少し制限を加えた．その制限をはずしてさらに拡張した変分を行うと，保存則など重要な力学的情報を新たに導くことができる．正準理論に入る前に，それについて解説しておく．その方が後の考察がし易いからである．

3.1　拡張された変換と作用積分の変分

作用積分 $J[q]$ は任意の変分 δq^i と δt に対し，運動の経路上で (1.4.8) を満たす．t_1, t_2 は任意にとれるから，このことは $\delta J[q]_c = 0$ ならば，(1.4.8) から明らかなように，$\Theta(t)$ が時間によらず一定であるあること，つまり，$\Theta(t)$ は運動の保存量であることを意味する．これはまさに，作用積分を不変にする連続変換に対して一つの保存則があるというネーターの定理である．それゆえ，ネーターの定理は変分法の重要な応用例である．

運動方程式を積分してエネルギーや運動量などの保存則が得られることはよく知られている．どのような保存量と保存則が存在するかは，主としてその力学系を規定する運動方程式の性質，特にその不変性と関連している．ところが，その力学系についてラグランジュ関数 L が存在するときには，系の力学的性質は L によって決まるから，保存則は L の不変性（対称性）と深くかかわっている．したがって，運動方程式を解かなくとも L の不変性から保存則を見出すことができる．その事実を一般的に示したのがネーター の定理である．

そこで，次にネーターの定理の説明に進む．まず，座標と時間を同時に動かした次

の微小変換を考えよう．恒等変換（変換なし）から連続的に繋がる有限変換は微小変換の積み重ねで得られるので，微小変換を考察すれば十分である．それゆえ，次の微小変換を考える

$$q^i(t) \to q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t,\epsilon),$$
$$t \to t' = t + \delta t(t,\epsilon)) \tag{3.1.1}$$

ϵ は変換の微少パラメータであって，$\delta q^i(t,0) = \delta t(t,0) = 0$ とする．

前節での，変分は積分の両端付近のみで時間を変化させ，中間領域では q^i の関数形のみを変え，時間は動かさなかった．ネーターの定理は，すべての時刻で $q^i(t)$ と t を上式のように変化させてよいので，あらためて，(3.1.1) の変分に対して $\delta J[q]$ を計算しよう．

作用積分 $J[q,t]$ の変分を ϵ の 1 次，つまり δq^i，δt の 1 次まで求める．この変分では t も変化するので，J は q^i と t の汎関数であることを明記する．上記の変換によって $J[q,t]$ は

$$J[q',t'] = \int_{t'_1}^{t'_2} L(q'(t'),q'(t'))dt' \equiv \int_{t'_1}^{t'_2} L'dt' \tag{3.1.2}$$

に変わるから

$$\delta J[q,t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L' \frac{dt'}{dt} - L \right) \tag{3.1.3}$$

となる．(3.1.1) より得られる

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt}\delta t \tag{3.1.4}$$

を上式に代入して次式を得る；

$$\delta J[q,t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L' - L + L\frac{d\delta t}{dt} \right) \tag{3.1.5}$$

次に，この式の中の $L' = L(q'(t'),\dot{q}'(t'))$ を δq^i，$\delta\dot{q}^i$ および δt で展開するのであるが，(3.1.1) の δq^i は t の異なる時刻における量の差であるから

$$\delta\dot{q}^i \neq \frac{d}{dt}\delta q^i$$

である．そこで，t を固定した変分 $\bar{\delta} q^i$ を前節と同様に

$$\bar{\delta} q^i(t) = q'^i(t) - q^i(t) \tag{3.1.6}$$

によって定義する．すると

$$\bar{\delta}\dot{q}^i(t) = \frac{d}{dt}\bar{\delta}q^i(t) \tag{3.1.7}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}\delta q^i(t) \equiv q'^i(t') - q^i(t) &= q'^i(t') - q^i(t') + q^i(t') - q^i(t) \\ &= \bar{\delta}q^i(t') + \dot{q}^i(t)\delta t = \bar{\delta}q^i(t) + \dot{q}^i(t)\delta t\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

を得る．最後の表式では 2 次の微小量は無視して t' を t とした．

また，(3.1.4)，(3.1.7)，(3.1.8) を用い，さらに $\dot{q}'^i(t') = dq'^i(t')/dt'$ に注意して

$$\begin{aligned}\delta\dot{q}^i(t) = \dot{q}'^i(t') - \dot{q}^i(t) &= \frac{dq'^i(t')}{dt}\frac{dt}{dt'} - \dot{q}^i(t) \\ &= \frac{dq'^i(t')}{dt}(1 - \frac{d}{dt}\delta t) - \dot{q}^i(t) \\ &= \frac{d}{dt}(q'^i(t') - q^i(t)) - \frac{dq'^i(t')}{dt}\frac{d\delta t}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\bar{\delta}q^i(t) + \dot{q}^i(t)\delta t) - \dot{q}^i(t)\frac{d\delta t}{dt}\end{aligned}$$

をえる．上式の最後で 2 次の微小量を無視した．これより結局

$$\delta\dot{q}^i(t) = \bar{\delta}\dot{q}^i(t) + \ddot{q}^i(t)\delta t \tag{3.1.9}$$

となる．(3.1.8)，(3.1.9) を使って L' を展開すると，

$$\begin{aligned}L' &= L + \frac{\partial L}{\partial q^i}(\bar{\delta}q^i(t) + \dot{q}^i(t)\delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\bar{\delta}\dot{q}^i(t) + \ddot{q}^i(t)\delta t) \\ &= L + \frac{\partial L}{\partial q^i}\bar{\delta}q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}\dot{q}^i + \frac{dL}{dt}\delta t\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

となる．

こうして，(3.1.5) と (3.1.10) から

$$\delta J[q,t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right)\bar{\delta}q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}q^i + L\delta t\right)\right\} \tag{3.1.11}$$

が得られる．この結果は，任意の微小変分 (3.1.1) に対して成り立つ恒等式である．

3.2 作用積分の不変性と保存則：ネーターの第1定理

そこで，もし $J[q,t]$ が任意の積分領域 $[t_1,t_2]$ において，変換 (3.1.1) のもとで不変であるならば，

$$\delta J[q,t]=0. \tag{3.2.1}$$

である．したがって，ラグランジュの運動方程式のもとでは (3.1.11) の右辺の第1項は消えるので，次の保存則が成り立つ．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\bar{\delta}q^i+L\delta t\right)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i(t)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)\delta t\right\}=\frac{d\Theta}{dt}=0 \tag{3.2.2}$$

こうして保存量 Θ が得られた．この Θ は (1.4.7) で定義されたものである．

このように連続変換によって作用積分が不変ならば，その変換に対応した保存量が存在する．これをネーターの第1定理という．

これまでの議論は作用積分 J を不変にする変換というだけで，抽象的一般論であったが，要は δq^i，δt がいかなる変分であるか，その具体的表式によって保存量の表式が決まるわけである．そこで，具体的に実例を見ていこう．

その前に，独立な R 個の微小定数パラメーター $\epsilon^\alpha(\alpha=1\sim R)$ によって変換を次の表式で表そう

$$\begin{aligned}\delta q^i&=\epsilon^\alpha\phi^i_\alpha(q,\dot{q},t)\\ \delta t&=\epsilon^\alpha\tau_\alpha(t)\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

この ϕ^i_α，τ_α は任意関数ではなく，L が与えられれば $\delta J[q,t]=0$ によって具体的に定まるものである．この変換で $J[q,t]$ が不変ならば，ϵ^α はすべて独立パラメータであるから，(1.4.11) の Θ の式より，R 個の保存量

$$p_i\phi^i_\alpha-E\tau_\alpha=\text{一定},\quad(\alpha=1\sim R) \tag{3.2.4}$$

を得る．（上式は Θ を定数パラメータ ϵ^α で除したものである．以下同じ．）

このように，作用積分を不変にする一つの連続変換（ϵ は連続パラメーター）に対して一つの保存量の存在が示めせた．ではその逆，つまり，一つの保存量があれば，それに付随して作用積分を不変にする変換が存在するかという問題が生ずる．その答は条件付きで成り立つのであるが，その詳細は第9章にゆずり，先に進もう．

次に，簡単ではあるが物理的に重要な具体例をいくつか挙げていく．

例題 3.1.　エネルギー-運動量保存則

L が時間 t を陽に含まなければ，時間の一斉推進変換

$$t \to t' = t + \epsilon \tag{3.2.5}$$

に対して明らかに L は不変（したがって当然 J も不変）である．このとき (3.2.3) で $\phi^i = 0$，$\tau = 1$ であるから，(3.2.4) より

$$E = \text{一定} \qquad (\text{エネルギー保存則}) \tag{3.2.6}$$

を得る．

n 質点系の L が直交直線座標系において

$$L = \Sigma \frac{1}{2} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2 - V(|\, \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k \,|), \quad (j, k = 1 \sim n) \tag{3.2.7}$$

のとき，

$$\boldsymbol{r}_j \to \boldsymbol{r}'_j = \boldsymbol{r}_j + \epsilon \tag{3.2.8}$$

に対して L は不変である．この場合は，$\delta \boldsymbol{r}_j = \epsilon \quad (\phi_j = 1,\ \tau_\alpha = 0)$ であるから

$$\Sigma \boldsymbol{p}_j = \text{一定} \quad (\text{運動量保存則}) \tag{3.2.9}$$

を得る．

例題 3.2.　循環座標と保存則

また，L がある特定の q^ν を含まないとき，q^ν を循環座標という．この場合は，q^ν のみを定数だけ変化させる変換で $\dot{q}^\nu$ は不変であるから L は不変である．すなわち

$$\begin{aligned} q^\nu \to q'^\nu = q^\nu + \epsilon \quad (\dot{\epsilon} = 0), \quad \dot{q}'^\nu = \dot{q}^\nu \\ \phi_i^\nu = \delta_i^\nu \quad (\text{クロネッカーの}\delta), \quad \tau = 0 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

に対して L は不変であるから，(3-2-4) により

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\nu} = \text{一定} \tag{3.2.11}$$

このように循環座標に共役な一般化運動量は保存する．

角運動量保存則

循環座標の例は，極座標表示での角度変数 θ である．２次元空間で，原点に向かう中心力のもとでの質点の運動に対するラグランジュ関数は

$$L = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \tag{3.2.12}$$

である．これには θ が含まれていない．よって，θ に共役な運動量が保存量である．

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = 一定 \tag{3.2.13}$$

これは原点周りの面積速度（の２倍）の保存則，つまり角運動量保存則であることはよく知られている．

3.3 保存則の拡張：作用積分の準不変性

ここでさらに注目すべき点は，ネーターの定理は $J[q,t]$ が厳密に不変である必要はなく，作用積分の変分が次のように積分記号の中で時間の全微分になっている場合にも拡張できるということである．すなわち

$$\begin{aligned}\delta J[q,t] &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(q,\epsilon)}{dt}dt \\ &= F(q(t_2),\epsilon) - F(q(t_1),\epsilon).\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

となる場合にも拡張できる．このようなとき δJ は**準不変**（quasi-invariant）と呼ぶことにする．このとき，ラグランジュ方程式の下で，(3.1.11)，(3.2.2) および (3.3.1) から，次の保存則が得られる．

$$\frac{d(\Theta - F)}{dt} = 0 \tag{3.3.2}$$

この場合は，保存量は Θ ではなく，$(\Theta - F)$ である．これが拡張されたネーターの定理である．

ここの議論は，以前指摘したように，ラグランジュ関数には任意関数の時間微分 dF/dt の不定性があることに対応している．

時間を変化させずに，q^i のみ変化させる場合は，(3.3.1) の条件は簡単で，L の変化は，積分記号内で $\delta L = dF/dt$ であるから，次のように単純化される．

$$L \to L' = L(q,\dot{q}) + \frac{dF(q,\epsilon)}{dt} \tag{3.3.3}$$

(3.3.1) の拡張が許されるのは，ラグランジュ方程式を導く変分は積分の両端を固定して行うから（両端で $\epsilon = 0$)，(3.3.1) の右辺はラグランジュ方程式に寄与しない（ラグランジュ方程式は変わらない）からである．したがって (3.3.1) のように，L の変化が時間の全微分形になる場合には，ラグランジュ方程式のもとで $\Theta - F$ が保存量となる．

その具体的例を挙げておこう．

例題 3.3．作用積分が準不変の例：ガリレイ変換

前の n 質点系の例 (3.2.7) で与えられる L から導かれるラグランジュ方程式は，ガリレイ変換で不変であることはよく知られている．２つの慣性系間の相対速度 v を微小速度 ϵ で表すと，ガリレイ変換は

$$\delta \boldsymbol{r}_j = \epsilon t, \quad \delta t = 0 \tag{3.3.4}$$

である．この変換に対して

$$\delta L = L' - L = \Sigma m_j \epsilon \dot{\boldsymbol{r}}_j, \tag{3.3.5}$$

この右辺は，時間の全微分形であるから，

$$F = \Sigma m_j \epsilon \boldsymbol{r}_j$$

となる．よって，(3.3.2)，(1.4.11) により

$$\Sigma m_j (\dot{\boldsymbol{r}}_j t - \boldsymbol{r}_j) = \text{一定} \tag{3.3.6}$$

を得る．

質量中心の座標 $R = \Sigma m_j \boldsymbol{r}_j / \Sigma m_j$ を用いると，上式は質量中心の等速運動を表す式

$$M\boldsymbol{R} - \boldsymbol{P}t = \text{一定}$$

となる．M は全質量，$\boldsymbol{P} = \Sigma m_j \boldsymbol{v}_j$ は全運動量である．

以上の具体例からも分かるように，ネーターの定理は，連続変換に対するラグランジュ関数の対称性（不変性）と保存則の関係を与えるものである．エネルギー保存則は時間の一様性と，運動量保存則は空間の一様性（座標原点の任意性）と，また角運

動量保存則は空間の等方性（回転不変性）という幾何学的対称性を表している．ラグランジュ関数，あるいは作用積分を（準）不変にする変換は幾何学的なものばかりでなく，広い対称性と結びついたものがある．ゲージ変換は重要なその例である．

3.4　ネーターの第2定理：任意関数を含む変換

力学変数 q^i と時間 t の変換によって δJ が (3.3.1) の形に書けるとき，ラグランジュ方程式に変わりはない，したがって，変換の前後の q^i, t と q'^i, t' とは同一の運動方程式の解である．このことは，ある特別の事情の場合には，力学変数が一義的には決まらない可能性を示唆している．しかし，運動方程式が N 個（自由度）とも独立であって，積分可能であれば，その解は初期条件によって一義的に決まってしまう．したがって，前節の変換は座標変換の自由度に対応するものであって，運動経路そのもの（運動方程式の解）の任意性ではない．

つまり，変換 (3.2.3) の $\phi^i_\alpha, \tau_\alpha$ は任意ではなく L によって規定されていて，任意に変えうるのは定数パラメータ ϵ のみであった．

だが，ϵ を単なるパラメータでなく，時間の任意関数に拡張して，(3.1.1) の代わりに

$$\left.\begin{aligned} \delta q^i(t) &= \epsilon^\alpha(t)\phi^i_\alpha(q,\dot{q}) + \dot{\epsilon}^\alpha(t)\psi^i_\alpha(q,\dot{q}) \\ \delta t &= \epsilon^\alpha(t)\tau_\alpha(q,\dot{q}), \quad (\alpha = 1 \sim R) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.1}$$

としたときに，作用積分の変分が準不変

$$\delta J[q,t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\{\epsilon^\alpha \zeta_\alpha(q,\dot{q}) + \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha(q,\dot{q})\} \tag{3.4.2}$$

となる場合を考えよう*)．ここで ζ_α，η_α は L によって決まるある関数である．上式の右辺は前節の F を ϵ^α とその1次微分まで採って表したものである．

今度は任意関数 $\epsilon^\alpha(t)$ が変換式の中に入っているから，保存則が得られるばかりでなく，ラグランジュ方程式の間にも関係が着くのである．したがって，N 個の運動方程式は独立でなく，その解 q^i は一義的には決まらない．このように**任意関数を含む変換をゲージ変換といい，そのような力学系をゲージ不変な系という**．

注*）ここでは変換式を ϵ^α，$\dot{\epsilon}^\alpha$ までとったが，一般にはより高次の $\ddot{\epsilon}^\alpha$ なども考慮しなければならない場合もある．ここでの議論はこれで十分である．ϵ^α の高次の時間微分を含む一般論は，第8章　ゲージ理論のところで行う．

作用積分がこのような性質を持つときに，(3.1.11) と (3.4.2) から，いくつかの有用な関係式が得られる．(3.4.1) の表式を (3.1.11) に代入して次の恒等式を得たとする．

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\epsilon^\alpha \left\{ [L]_i(\phi^i_\alpha - \dot{q}^i \tau_\alpha) - \frac{d}{dt}(\psi^i_\alpha [L]_i) \right\} \right.$$
$$\left. + \frac{d}{dt} \left\{ \epsilon^\alpha \psi^i_\alpha [L]_i + p_i \delta q^i - E\delta t - \epsilon^\alpha \zeta_\alpha + \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha \right\} \right] \equiv 0 \tag{3.4.3}$$

ここに $[L]_i$ は L より得られるラグランジュ方程式の i 成分を表す略記である；

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{3.4.4}$$

以後，この表式を L のオイラー微分と呼ぶことにする．

$\epsilon^\alpha(t)$ は任意関数であるから，まず境界のところで

$$\epsilon^\alpha(t_1) = \epsilon^\alpha(t_2) = \dot{\epsilon}^\alpha(t_1) = \dot{\epsilon}^\alpha(t_2) = 0 \tag{3.4.5}$$

となるように選ぶことができる．すると (3.4.3) の第 2 項を積分すると消える．

ϵ^α は t_1，t_2 以外のところではまだ任意であるから，第 1 項の ϵ^α の因子はすべての α について恒等的に 0 でなければならない．よって

$$[L]_i(\phi^i_\alpha - \dot{q}^i \tau_\alpha) - \frac{d}{dt}(\psi^i_\alpha [L]_i) \equiv 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{3.4.6}$$

を得る．

再び (3.4.3) にもどって，(3.4.6) を使うと，積分内の第 1 項は落ちる．ここで改めて $\epsilon^\alpha(t)$ を t_1, t_2 においても任意関数とすることができる．すると，t_1, t_2 は任意であるから，時間微分の｛　｝の中かはゼロでなければならない；

$$[L]_i \epsilon^\alpha \psi^i_\alpha + p_i(\epsilon^\alpha \phi^i_\alpha + \dot{\epsilon}^\alpha \psi^i_\alpha) - \epsilon^\alpha(\tau_\alpha E + \zeta_\alpha) - \dot{\epsilon}^\alpha \eta_\alpha \equiv 0 \tag{3.4.7}$$

この式で $\epsilon^\alpha(t)$ と $\dot{\epsilon}^\alpha(t)$ は独立にとりうるので，それぞれの係数因子をゼロとおくことができて，結局

$$p_i \phi^i_\alpha - \tau_\alpha E - \zeta_\alpha + [L]_i \psi^i_\alpha \equiv 0 \tag{3.4.8}$$
$$p_i \psi^i_\alpha - \eta_\alpha \equiv 0 \tag{3.4.9}$$

を得る．**この関係式がネーターの第 2 定理である．この (3.4.9) は q と $\dot{q}$ のみの恒等式，つまり速度位相空間における恒等式である．**

(3.4.6) は N 個のラグランジュ方程式の間に R 個の関係があることを示す式である．また，(3.4.8) において，$[L]_i = 0$ とおくと

$$p_i \phi^i_\alpha - \tau_\alpha E - \zeta_\alpha = 0 \tag{3.4.10}$$

という式を得るが，この式には $\ddot{q}$ は含まれていない．このことはラグランジュ方程式のもとで成立すべき拘束条件の存在を示すものである．それに対して，(3.4.9) はラグランジュ方程式に関係なく，L の性質のみから導かれる拘束条件である．後者は1次拘束条件（primary constraint），前者は2次拘束条件（secondary constraint）と呼ばれるもので，第7章拘束系の力学と第8章のゲージ理論のところで詳しく説明するが，これら拘束条件はゲージ理論で重要な役目をする．

さらに，(3.4.8) から有用な関係式が得られる．(3.4.8) は $[L]_i$ の中に $\ddot{q}^i$ が現れるが，それ以外の他の表式には $\ddot{q}^i$ は含まれない．よって，$\ddot{q}^i$ の係数因子は恒等的に消えねばならない；

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \psi^j_\alpha(q, \dot{q}) \equiv A_{ij}(q, \dot{q}) \psi^j_\alpha(q, \dot{q}) \equiv 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{3.4.11}$$

A_{ij} はヘッシアン行列である．この式はすべての ψ^j_α がゼロでなければ，A_{ij} は最高 R 個のゼロ固有値をもつことを示している．もし，ある α に対して ψ^j_α がゼロベクトル（すべての i 成分がゼロ）ならば，その α に対して，(3.4.6) から $\ddot{q}^i$ の係数因子として

$$A_{ij}(\phi^i_\alpha - \dot{q}^i \tau_\alpha) \equiv 0 \tag{3.4.12}$$

を得るので，いずれにしても，A_{ij} は両方合わせて R 個のゼロ固有値ベクトルとゼロ固有値をもつことになる（ただし，$\phi^i_\alpha - q^i \tau_\alpha \neq 0$ とする）．したがって，いずれの場合も A_{ij} の階数は

$$\mathrm{rank}(A_{ij}) = N - R \tag{3.4.13}$$

である．

このように，**R 個の任意関数 $\epsilon^\alpha(t)$ を含むゲージ変換に対して作用積分が** (3.4.2) **のように変化するとき，A_{ij} は正則ではなくその階数は $N - R$ である．その場合は，ラグランジュ方程式は $N - R$ 個のみ独立であって，R 個の拘束条件が現れる．**

また，第 2 章で述べたように，

$$p_i = \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L(q,\xi)}{\partial \xi^i}$$
$$A_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j}$$

であるから，ヘッシアン行列が正則でなければ p_i は ξ^i について独立関数ではない．すると位相空間では p_i, q^i の間に R 個の関係式が生ずる．それを (2.2.8) のように

$${}_*\Phi_\alpha(p,q) = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{3.4.14}$$

と表す．これが (3.4.9) に対応するものである．位相空間における (3.4.14) の中の p を速度位相空間の変数 q, ξ で表すと，${}_*\Phi_\alpha$ は (3.4.9) のように恒等的に消えて

$$\Phi_\alpha(p\ (q,\xi), q) \equiv 0 \tag{3.4.15}$$

を得る．その 1 例が例題 2.2 であり，(2.2.12) の ${}_*\Phi$ について指摘したことである．

ホロノーム系においても，A_{ij} が正則でなければ，一般的に拘束条件が現れる．その拘束条件は特異ラグランジュ関数の性質から生ずるものであるから，明らかに内的拘束条件である．

例題 3.4．簡単なゲージ不変な系

自由度 2 の系

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1 - q^2)^2 \tag{3.4.16}$$

正準運動量は

$$p_1 = \xi^1 - q^2, \quad p_2 = 0.$$

よって，${}_*\Phi = p_2 = 0$ は拘束条件である．拘束条件はこれ 1 つであるから，ゲージ変換の自由度は 1 である．

この L は次の変換で明らかに不変である；

$$\delta q^1 = \epsilon(t), \quad \delta q^2 = \dot{\epsilon}(t) \tag{3.4.17}$$

この変換は (3.4.1) で

$$\phi^1 = 1, \quad \psi^1 = 0$$
$$\phi^2 = 0, \quad \psi^2 = 1$$

とおいたものである．拘束条件 $p_2 = 0$ は 1 次拘束条件 (3.4.9) に相当する．(3.4.10) は $p_1 = 0$ になる．この拘束条件は 2 次拘束条件で，実は 1 次拘束条件がラグランジュ方程式のもとで定常であるべしという要請から導かれる 2 次拘束条件である（第 7 章参照）．

例題 3.5. 電磁場

ゲージ理論として古くから知られている有名なものは，マクスウエルの電磁気理論である．ラグランジュ関数（密度）は

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)^2 \equiv (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2,\ (\mu, \nu = 0 \sim 3) \tag{3.4.18}$$

この L は変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \epsilon(x)$ に対して不変である．$\epsilon(x)$ は時間・空間座標 x の任意関数である．

A_μ の時間微分 $\dot{A}_\mu = \partial_0 A_\mu$ で L を微分すると，共役運動量 π_μ は

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} = \partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0 \tag{3.4.19}$$

となる．すると $\pi_0 = 0$ であるから，これが 1 次拘束条件

$$_*\Phi = \pi_0 = 0 \tag{3.4.20}$$

である．

例題 3.6.

次の質点系の例を考えよう．

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\dot{q}^j\dot{q}^j - V(q) \tag{3.4.21}$$

$$det(A_{ij}) = det(g_{ij}) = 0, \quad rank(g_{ij}) = N - R \tag{3.4.22}$$

を考える．

このLは，変換

$$\delta q^i = \epsilon^\alpha(t)\phi^i_\alpha(q), \quad \delta t = 0 \tag{3.4.23}$$

に対して，次の条件のもとで不変である．ϕ^i_α が g_{ij} のゼロ固有値ベクトル

$$g_{ij}\phi^i_\alpha = 0 \tag{3.4.24}$$

で，かつ

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\phi_\alpha^k + g_{jk}\frac{\partial \phi_\alpha^k}{\partial q^i} + g_{ki}\frac{\partial \phi_\alpha^k}{\partial q^j} = 0 \tag{3.4.25}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q^i}\phi_\alpha^i = 0 \tag{3.4.26}$$

を満たすとする．

実際に L がこの変換で不変ならば，(3.4.25)，(3.4.26) が満たされることを示そう．変換 (3.4.23) により L の変分は

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^j\dot{q}^j\delta q^k + g_{ij}\dot{q}^i\delta\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^k}\delta q^k \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^k}\right)\epsilon^\alpha\phi_\alpha^k + g_{ij}\dot{q}^i\left(\dot{\epsilon}^\alpha\phi_\alpha^j + \epsilon^\alpha\frac{\partial \phi_\alpha^j}{\partial q^k}\dot{q}^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\phi_\alpha^k + 2g_{ik}\frac{\partial \phi_\alpha^k}{\partial q^j}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j\epsilon^\alpha - \frac{\partial V}{\partial q^k}\phi_\alpha^k\epsilon^\alpha + g_{ij}\dot{q}^i\phi_\alpha^j\dot{\epsilon}^\alpha
\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

となる．$\delta L = 0$ なるためには，任意関数 ϵ^α と $\dot{\epsilon}^\alpha$ の係数因子がそれぞれゼロでなければならないから恒等式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\phi_\alpha^k + g_{ik}\frac{\partial \phi_\alpha^k}{\partial q^j} + g_{jk}\frac{\partial \phi_\alpha^k}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^k}\phi_\alpha^k \equiv 0 \tag{3.4.28}$$

および

$$g_{ij}\dot{q}^i\phi_\alpha^j \equiv 0 \tag{3.4.29}$$

を得る．しかし，V には $\dot{q}^i$ がないので，(3.4.28) は分離して (3.4.25) と (3.4.26) を得る．また，(3.4.29) から (3.4.24) が導かれる．(3.4.29) は (3.4.10) に相当する．

以上のことから理解できるように，実際に運動方程式を解かなくとも，**作用積分，ひいてはラグランジュ関数の性質から，その力学系に関する多くに情報を得ることができるのである．特に保存則とラグランジュ関数の対称性は密接に関連している．**

作用積分やラグランジュ関数の変換論はこれで打ち切り，正準理論に移ろう．

第 4 章

正準理論

正準理論は，解析力学の真髄ともいえる理論形式であり，物理的にも数学的にも非常に内容豊かで，しかも美しい形式をもつ素晴らしいものである．正準理論が，期せずして量子力学の基礎となったのは，その普遍的に体系化された物理的理論構造の豊かさにあったといえるであろう．

本章ではその正準理論の重要な性質について述べる．

4.1 正準方程式の数学的構造

ハミルトン形式は，互に正準共役な力学変数 q^i と p_i を導入し，自由度 N の系の運動方程式を $2N$ 個の 1 階微分方程式で表すことを 2.2 節で述べた．その正準方程式は

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H\ (q,p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H\ (q,p)}{\partial q^i} \end{aligned}\right\} \tag{4.1.1}$$

であった．この表式は，q^i と p_i が符号を除いて互に交叉対称になっているから，$2N$ 成分の行列を用いて次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} \equiv S \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

ここで，左辺は $2N$ 成分をもつ縦行列，また I は $(N \times N)$ 単位行列であり，S は $2N \times 2N$ 行列である．

力学変数の時間発展を与える演算子 X_t を導入しよう．X_t は次のように表せることが，上式よりわかる；

$$X_t = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{4.1.3}$$

この X_t を用いると，運動方程式は，また

$$\begin{pmatrix} \dot{q}^i \\ \dot{p}_i \end{pmatrix} = X_t \begin{pmatrix} q^i \\ p_i \end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

とも表すことができる．この X_t を運動の生成演算子と呼ぶ．

すると，一般の力学量 (q, p の関数)$f(q,p)$ の時間発展は，

$$\frac{d}{dt}f(q,p) = \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = X_t f \tag{4.1.5}$$

となる．

4.2　ポアソン括弧式

位相空間における力学量 $f(q,p)$ の運動は，前節の (4.1.5) で表されるが，これを，

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{4.2.1}$$

と記して，$\{f, H\}$ を f と H のポアソン括弧式という．

このポアソン括弧は，行列表示を用いると次のように表すことができる；

$$\{f, H\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q^i} & \dfrac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q^i} & \dfrac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

ポアソン括弧は任意の二つの力学量 $f(q,p)$ と，$g(q,p)$ について拡張されて

$$\{f, g\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial q^i} & \dfrac{\partial f}{\partial p_i} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial g}{\partial p_i} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{4.2.3}$$

を f と g のポアソン括弧式という．ポアソン括弧は，正準理論では非常に重要な役をする．さらに量子力学への橋渡しとしても決定的な役割を演じた．

ポアソン括弧式は，その定義から明らかなように反対称の性質を有す

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \tag{4.2.4}$$

正準方程式を，ポアソン括弧式によって，改めて書下すと

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

となる．このように，ポアソン括弧を使うと，正準方程式は完全に対称形になる．

(4.2.3) や (4.2.5) の計算において，その基礎になる式は，q^i, p_i の間のポアソン括弧式，すなわち

$$\begin{aligned} &\{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0 \\ &\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

である．これがポアソン括弧式の基本形であり，q, p の任意関数のポアソン括弧は (4.2.6) を用いて計算しうる．

例題 4.1.

力学量 $f(q,p)$ とのポアソン括弧式の計算に (4.2.6) の基本形を用いた例を示す．

$$\{f(q,p), q^i\} = \frac{\partial f}{\partial q^j}\{q^j, q^i\} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\{p_j, q^i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_j}\delta^i_j = -\frac{\partial f}{\partial p_i} \tag{4.2.7}$$

$$\{f(q,p), p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q^j}\{q^j, p_i\} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\{p_j, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q^j}\delta^j_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{4.2.8}$$

ポアソン括弧の満す重要な性質をまとめて列記しておく．

(i)　反対称性：$\{f, g\} = -\{g, f\}$　(4.2.9)

(ii)　分配則：c_1, c_2 を定数として

$$\{f, c_1 g_1 + c_2 g_2\} = c_1\{f, g_1\} + c_2\{f, g_2\} \tag{4.2.10}$$

(iii)　ヤコビの恒等式：３つの力学量 f，g，h に対して

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \equiv 0 \tag{4.2.11}$$

(iv) $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$ (4.2.12)

(v) F が f_k $(k = 1 \sim K)$ の関数のとき

$$\{F, g\} = \frac{\partial F}{\partial f_k}\{f_k, g\} \tag{4.2.13}$$

性質 (i)，(ii) および (iii) を満すとき，力学量の全体はリー環（Lie ring）をなすという．

証明：上記の５つの性質を証明しよう．(i) はすでに述べたので，(ii) 以下を証明する．

(ii) は微分の性質から明らかである．(iv) は２つの関数の積の微分に関する性質と同じである．ポアソン括弧は微分演算子であるから，この性質は容易に示される．(v) も関数の関数の微分と同形であり，これも明らかである．

残りは (iii) ヤコビの恒等式である．この証明はポアソン括弧の定義に従って単刀直入に微分演算を行えば，直接確かめることができる；

$$\begin{aligned}
\text{第１項} &= \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial\{g, h\}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\{g, h\}}{\partial q^i} \\
&= \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial g}{\partial q^j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q^j}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial g}{\partial q^j}\frac{\partial h}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial h}{\partial q^j}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial q^i}\left(\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial q^j} + \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q^j}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial p_i \partial q^j}\right) \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(\frac{\partial h}{\partial p_j}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial g}{\partial q^j}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i \partial p_j} - \frac{\partial h}{\partial q^j}\frac{\partial^2 g}{\partial q^i \partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial^2 h}{\partial q^i \partial q^j}\right)
\end{aligned}$$

第２項，第３項も f，g，h をサイクリックに入れ換えた表式となる．それら３項を加えるとすべて反対符号の項が現われて打消し合ってゼロになる．その際，添字 i と j は和をとっているので，同一項の中で i と j を入れ換えてもよいことに留意すればよい．（証明終り）

ポアソン括弧について，ついでながら補足しておく．f と任意関数のポアソン括弧式は (4-2-3) から明らかなように，次の微分演算子で表すことができる；

$$\{f, \quad\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \equiv X_f \tag{4.2.14}$$

この表式で定義される演算子 X_f は f とのポアソン括弧式を与えるものである．この X_f の表式を用いると，正準方程式を与える (4.1.3) の X_t は X_H となる．

するとヤコビの恒等式は，性質 (i) の反対称を用いて変形すると

$$\begin{aligned} &X_f\{g,h\} - X_g\{f,h\} - \{\{f,g\},h\} \\ &\quad = X_f(X_g h) - X_g(X_f h) - X_{\{f,g\}}h \\ &\quad = (X_f X_g - X_g X_f - X_{\{f,g\}})h \equiv 0 \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

となる．これは任意の h に対して成り立つ恒等式であるから，

$$[X_f, X_g] \equiv X_f X_g - X_g X_f = X_{\{f,g\}} \tag{4.2.16}$$

をえる．ここの［　,　］は交換子積と呼ばれるものである．(4.2.16) は大変有用な公式である．

4.3　ラグランジュ括弧式

ポアソン括弧式と密接に関係しているラグランジュ括弧式を導入する．それは，2 関数 f と g に対して

$$[f,g] \equiv \frac{\partial q^i}{\partial f}\frac{\partial p_i}{\partial g} - \frac{\partial q^i}{\partial g}\frac{\partial p_i}{\partial f} \tag{4.3.1}$$

で定義される．ポアソン括弧の基本形 (4.2.6) に対応するラグランジュ括弧式の基本形は，その定義から

$$\begin{aligned} &\left[q^i, q^j\right] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0 \\ &\left[q^i, p_j\right] = \delta^i_j \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

となる．

ラグランジュ括弧式は明らかに反対称性を有する

$$[f,g] = -[g,f] \tag{4.3.3}$$

また，行列表示を用いると，(4.2.3) に対応して

$$[f,g] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q^i}{\partial f} & \dfrac{\partial p_i}{\partial f} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q^i}{\partial g} \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial g} \end{pmatrix} \tag{4.3.4}$$

と表される．

ラグランジュ括弧とポアソン括弧との関係で重要なものは，互に逆行列に似た性質を有するということである．両括弧式の基本形から

$$\sum_j \{q^i, p_j\}\big[p_j, q^k\big] = \sum_j \delta^i_j(-\delta^k_j) = -\delta^{ik} \tag{4.3.5}$$

$$\sum_j \{p_i, q^j\}\big[q^j, p_k\big] = -\delta_{ik} \tag{4.3.6}$$

q 同士，p 同士の括弧式はすべてゼロであるから，これ以外の組合せはゼロとなる．そこで，q^i, p_i を一まとめにして z^l で表してみよう；

$$(z^l) \equiv (z^1, \ldots z^N, z^{N+1}, \ldots z^{2N}) \equiv (q^1, \ldots q^N, p_1, \ldots p_N) \tag{4.3.7}$$

とすると，(4.3.5) と (4.3.6) は，0 となる組合せも一緒にまとめて

$$\sum_{m=1}^{2N} \{z^l, z^m\}[z^m, z^n] = -\delta^{ln} \tag{4.3.8}$$

と書くことができる．ポアソン括弧とラグランジュ括弧をそれぞれ $(2N \times 2N)$ 行列とみなすと，二つの括弧式は，符号を除いて，互に逆行列の関係にあることがわかる．

本章のこれまでの話は，ヘシアン行列 A_{ij} が正則，つまり拘束条件のない力学系を前提として行った．拘束条件のある場合は，p_i のうちの p_α は独立でないから，ポアソン括弧式やラグランジュ括弧式の定義式は変更をうけて，(4.2.6) や (4.3.2) は成立しない．その変更の仕方は第 7 章で詳しく紹介するが，ポアソン括弧式の代りにディラック括弧式が登場する．

4.4 正準変換

ラグランジュ形式は一般座標を導入して，変数変換はかなり自由になされた．しかし，独立変数は N 個の位置座標 q^i のみであるから，その変換は q^i の間の変換に限られた．それに対して，ハミルトン形式では，位相空間の $2N$ 個の変数 q^i, p_i を独立変数として扱うから，q^i と p_i をこみにした広い変換が考えられるはずである．すると配位空間 q^i のみの変換よりもはるかに広い変換が許されることになる．より広い変換によって理論が不変ならば，その理論の内容も豊富になる*)．

注*）力学変数の変換に対する理論の不変性は理論の対称性や保存則と結びついていることはすでに述べた．さらに，ある座標変換の下で不変な理論は，観測者（の視座）を変えてもその理論が成立することを

そこで，q^i, p_i をこみにした変換

$$(q^i, p_i) \to (Q^i, P_i)$$

を考えよう．q^i と p_i は本来力学的には異質の変数であった．それを一緒にして変換を行うのであるから，ある程度制限を設けないと別の理論になってしまう．

その変換に対する制限は，少くとも正準方程式が新変数に対しても成り立つというものである．正準理論は，ハミルトン関数と正準方程式によってすべて決まってしまうから，**正準方程式が，その変換によって形を変えない**，という要請はもっともなことである．あまり勝手な変換をとり，Q，P が正準方程式を満さないのでは，力学として意味がない．そこで正準方程式の形を不変にする変換のみを考えよう．これを正準変換という．

この節では，まず正準変換の形式を具体的に求め，その性質を調べる．

正準変換を

$$\begin{aligned} q^i &= q^i(Q, P) \\ p_i &= p_i(Q, P) \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

と記す．正準変換の定義から，Q^i, P_i も q^i, p_i についての正準方程式 (4.1.1) と同形の

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial K(Q,P)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K(Q,P)}{\partial Q^i} \tag{4.4.2}$$

を満さなければならない．ただし，$K(Q,P)$ は新変数に変換後のハミルトン関数である．

ところで，正準方程式は，位相空間で q^i, p_i を独立変分とした (2.2.17)，(2.2.18) から導かれた：

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}^i - H(q,p) \right) dt = 0 \tag{4.4.3}$$

それゆえ，正準変換は (4.4.3) と

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(P_i \dot{Q}^i - K(Q,P) + \frac{dW}{dt} \right) dt = 0 \tag{4.4.4}$$

意味するから，理論の普遍性と客観性を示唆している．自然法則は，本来人間が選んだ記述の仕方（座標系の選び方）によらないはずである．その点で慣性系はまだ特殊であり，一般座標系の方が望ましい．それゆえ，広い変換で不変な理論ほど望ましいものといえる．

が満されればよい．上式で時間による全微分項 dW/dt は例によって，境界点 t_1, t_2 で変分をゼロにすることからくる任意性があるために付加されたものである．この任意性は第 1 章 1.3 節で述べたラグランジュ関数の不定性と類似のものである．

上の２式より，正準変換であるための必要かつ十分条件は

$$p_i\dot{q}^i - H(q,p) = P_i\dot{Q}^i - K(Q,P) + \frac{dW}{dt} \tag{4.4.5}$$

ということになる．この式を速度位相空間でみると，ラグランジュ関数 $L(q,\xi)$ と $L'(Q,\Xi)$ の関係となる．それゆえ，dW/dt はまさにラグランジュ関数の不定性そのものである．

ここに導入された任意関数 W を，q，p，Q，P のなかのどの変数の関数とみなすかにより，いろいろな変換形式が導かれるのである．

(i)　W を q，Q，t の関数とするとき

$$\frac{dW(q,Q,t)}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial W}{\partial Q^i}\dot{Q}^i + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{4.4.6}$$

である．これを (4.4.5) に代入すると，この式は恒等式であるから両辺の $\dot{q}^i, \dot{Q}^i$ の係数因子を等しいとおいて，次の変換式を得る；

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i} \tag{4.4.7}$$

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{4.4.8}$$

(ii)　W を q，P，t の関数とするとき

(4.4.5) を次のようにまず変形する

$$p_i\dot{q}^i - H = -Q^i\dot{P}_i - K + \frac{dW'(q,P,t)}{dt} \tag{4.4.9}$$

$$W'(q,P,t) = W + Q^iP_i \tag{4.4.10}$$

この W' を改めて q，P，t の関数とみなすのである．すると

$$\frac{dW'}{dt} = \frac{\partial W'}{\partial q^i}\dot{q}_i + \frac{\partial W'}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial W'}{\partial t}$$

これと (4.4.9) とから，次の変換式を得る；

$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial q_i}, \quad Q^i = \frac{\partial W'}{\partial P_i} \tag{4.4.11}$$

$$K = H + \frac{\partial W'}{\partial t} \tag{4.4.12}$$

これ以外に，W を (p,Q,t)，あるいは (p,P,t) の関数とみるかにより，それぞれ別形式の正準変換式が導かれる．

いずれにせよ，W や W' が与えられれば正準変換が決るので，**W，W' は正準変換の母関数**である．W が時間 t を陽に含まなければ，$K=H$ となり，単に変数の書き換えである．

例題 4.2.　配位空間における座標変換

q^i を Q^i に変えるだけの変換

$$q^i = q^i(Q) \tag{4.4.13}$$

の母関数は

$$W(p,Q) = -p_i q^i(Q) \tag{4.4.14}$$

である．この場合の変換式は

$$P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i} = p_j \frac{\partial q^j}{\partial Q^i}, \quad q^i = -\frac{\partial W}{\partial p_i} = q^i(Q), \quad K = H \tag{4.4.15}$$

である．このように，座標変換も正準変換の一種である．

例題 4.3.　q と p を入れ換える正準変換

正準変換の特別な例として，q と p を入れ換えるものがある．その母関数は

$$W = \sum_i q^i Q^i \tag{4.4.16}$$

である．これと (4.4.7) とより

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i} = Q^i, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i} = -q^i \tag{4.4.17}$$

となる．この変換 $p_i \to Q^i, q^i \to -P_i$ においては符合を除いて位置座標と運動量とが入れ換っている．

例題 4.3 で示されるように，正準変換には q^i と p_i との役割が入れ換るものがある．こうなると，位置座標とか運動量とかいう物理的意味の区別は失なわれてしまう．それゆえ，一般変数を用いた正準変数は，**互に共役は N 個の変数 q^i と N 個の変数 p_i**

の組ということしかできないことになる．したがって，正準変数はラグランジュの一般座標よりはるかに一般的かつ抽象的な力学変数である．このことは同時に，正準理論の広さと抽象性を意味しているわけである．

4.5 シンプレクティク変換としての正準変換

正準変換は正準方程式の形を変えないような，位相空間での変換であるとした．そこでその性質を用いて，正準変換の満すべき条件を (4.1.2) の行列 S を用いて表しておく．

変換を $Q^i = Q^i(q,p), P_i = P_i(q,p)$ とする．すると

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q}^i &= \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\dot{p}_j \\ \dot{P}_i &= \frac{\partial P_i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\dot{p}_j \end{aligned}\right\} \tag{4.5.1}$$

であるから，変換は行列表示で

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}^i \\ \dot{P}_i \end{pmatrix} = \tilde{R}_{ij} \begin{pmatrix} \dot{q}^j \\ \dot{p}_j \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

$$\tilde{R} \equiv \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial Q^i}{\partial q^j} & \dfrac{\partial Q^i}{\partial p_j} \\ \hline \dfrac{\partial P_i}{\partial q^j} & \dfrac{\partial P_i}{\partial p_j} \end{array}\right) \tag{4.5.3}$$

と表される．ここに定義された $\tilde{R}$ は $(2N \times 2N)$ 行列であり，左上の $\partial Q^i/\partial q^j$ は $(N \times N)$ 行列の (i,j) 成分である．他の区画も同様．

正準方程式

$$\begin{pmatrix} \dot{Q}^i \\ \dot{P}_i \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial Q^i} \\ \dfrac{\partial K}{\partial P_i} \end{pmatrix} \tag{4.5.4}$$

を q，p に変換すると次のようになる（行列要素を示す i，j は省略）；

$$\tilde{R}\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = S \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial q}{\partial Q} & \dfrac{\partial p}{\partial Q} \\ \hline \dfrac{\partial q}{\partial P} & \dfrac{\partial p}{\partial P} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \equiv SR \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{4.5.5}$$

この変換は時間 t によらないので $K = H$ である．R は上式で定義された行列である．

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial Q^k} + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q^k} &= \frac{\partial Q^i}{\partial Q^k} = \delta^i_k \\ \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial P_k} + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_k} &= \frac{\partial Q^i}{\partial P_k} = 0 \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

などに注意すると，$\tilde{R}$ の逆行列は

$$\tilde{R}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial q}{\partial Q} & \dfrac{\partial q}{\partial P} \\ \hline \dfrac{\partial p}{\partial Q} & \dfrac{\partial p}{\partial P} \end{array}\right) \tag{4.5.7}$$

であることがわかる．この $\tilde{R}^{-1}$ は (4.5.5) で定義された R の転置行列 R^t である；$\tilde{R}^{-1} = R^t$，つまり $\tilde{R} = (R^t)^{-1}$．すると (4.5.5) は

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = R^t S R \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \tag{4.5.8}$$

と書ける．この式が正準方程式であるための条件は

$$R^t S R = S \tag{4.5.9}$$

である．ここで S，R は

$$\begin{aligned} S &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right) \\ R &= \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial q}{\partial Q} & \dfrac{\partial p}{\partial Q} \\ \hline \dfrac{\partial q}{\partial P} & \dfrac{\partial p}{\partial P} \end{array}\right) \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

である．

(4.5.9) を満す変換をシンプレクティク変換という．(4.5.9) より

$$\det R = \pm 1 \tag{4.5.11}$$

である．シンプレクティク変換の条件式は，直交変換 T が満す関係式

$$T^t I T = I \tag{4.5.12}$$

に対応する．S はこの単位行列 I に対応している．

(4.5.9) を要素ごとに書き下すと

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\frac{\partial p_i}{\partial Q^k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q^j}\frac{\partial q^i}{\partial Q^k} &= 0 \\
\frac{\partial q^i}{\partial Q^j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q^j}\frac{\partial q^i}{\partial P_k} &= \delta_j^k \\
\frac{\partial q^i}{\partial P_j}\frac{\partial p_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_j}\frac{\partial q^i}{\partial P_k} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.5.13}$$

となる．もう一つの式は第２式と同じなので省略した．これらの式は，q^i, p_i 空間で定義されるラグランジュ括弧 (4.3.1)，(4.3.2) を用いて次のように表される．(f，g に対応するものが Q^i，P_i である)；

$$\left[Q^j, Q^k\right] = [P_j, P_k] = 0, \quad \left[Q^j, P_k\right] = \delta_k^j \tag{4.5.14}$$

逆変換を考えれば，Q，P の代りに，q，p についても，当然同様の式が成り立つ．このようにシンプレクティク変換はラグランジュ括弧とも密接に関連している．

例題 4.4.

Q と P の関数を $f(Q, P)$ とする．q, p 位相空間で

$$\begin{aligned}
\left[f, Q^i\right] &= \frac{\partial q^j}{\partial f}\frac{\partial p_j}{\partial Q^i} - \frac{\partial p_j}{\partial f}\frac{\partial q^j}{\partial Q_i} \\
&= \left(\frac{\partial q^j}{\partial Q^k}\frac{\partial Q^k}{\partial f} + \frac{\partial q^j}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial f}\right)\frac{\partial p_j}{\partial Q^i} - \left(\frac{\partial p_j}{\partial Q^k}\frac{\partial Q_k}{\partial f} + \frac{\partial p_j}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial f}\right)\frac{\partial q^j}{\partial Q^i} \\
&= \left[Q^k, Q^i\right]\frac{\partial Q^k}{\partial f} + \left[P_k, Q^i\right]\frac{\partial P_k}{\partial f}
\end{aligned}$$

(4.5.14) を用いると

$$\left[f(Q, P), Q^i\right] = -\delta_k^i \frac{\partial P_k}{\partial f} = -\frac{\partial P_i}{\partial f} \tag{4.5.15}$$

同様に

$$[f(Q, P), P_i] = \frac{\partial Q^i}{\partial f} \tag{4.5.16}$$

となる．この両式を合わせると，$f(Q,P)$ と $g(Q,P)$ について

$$[f(Q,P),g(Q,P)]_{(qp)}=\frac{\partial Q^i}{\partial f}\frac{\partial P_i}{\partial g}-\frac{\partial P_i}{\partial f}\frac{\partial Q^i}{\partial g}=[f,g]_{(Q,P)}$$

を導くことができる．ここに $[\ \ ,\ \ ]_{(qp)}$ は q，p 位相空間でのラグランジュ括弧，$[\ \ ,\ \ ]_{(Q,P)}$ は Q，P 位相空間におけるラグランジュ括弧を示す．それゆえ，**ラグランジュ括弧式は，正準変換の $(q,p)\to(Q,P)$ のもとで不変である．**

$$[f,g]_{(qp)}=[f,g]_{(Q,P)} \tag{4.5.17}$$

この不変性は，このあと示すポアソン括弧の不変性とともに重要な意味をもつ．

4.6　微小正準変換

連続的な有限変換は微小変換を繰り返し積み重ねてえられることは，ネーターの定理のところで利用した．正準変換も微小正準変換を基礎にして構成しうる．そこで微小正準変換を考察しよう．微小正準変換の中でも，特に重要なものは正準方程式である．

これまで正準変換を母関数 W によって表したが，微小正準変換に対しても母関数が定義される．いま微小変換

$$\begin{aligned}Q^i &= \mathrm{q}^{\,i}+dq^i,\\ P_i &= p_i+dp_i\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

をとる．この変換を与える母関数を $G(q,p)$ とし，微小変換のパラメータを ds と表すことにする．すると (4-4-7) やそれに類似の q^i,Q^i を与える式から

$$\begin{aligned}dq^i &= -\frac{\partial G(q,p)}{\partial p_i}ds\\ dp_i &= \frac{\partial G(q,p)}{\partial q_i}ds\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

を微小正準変換と定義できることがわかる．ただし，その際に微小量 ds がかかっているので，２次の微小量は無視できるから，(4.6.2) では分母の Q と P を q，p とした．

微小正準変換 (4.6.2) はポアソン括弧を (4.2.14) の微分演算子 X_f で表わしたように，次の微分演算子によって表現できる；

$$X_G=\frac{\partial G}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}-\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{4.6.3}$$

これにより，一般の力学量 $f(q,p)$ に対して，微小正準変換は

$$df(q,p) = dsX_G f(q,p) \tag{4.6.4}$$

と書くことができる．こうしてみると，微小正準変換はポアソン括弧式で表されることがわかる；

$$df = \{G,f\}ds \tag{4.6.5}$$

正準方程式と微小正準変換

力学系の状態は $2N$ 次元位相空間の中の点で表され，その運動は一本の連続曲線で表現されることはすでに述べた．その力学系の運動は正準方程式に従い，その曲線上を移動する．ある時刻 t における曲線上の点を指定する正準変数 q^i と p_i の移動は当然正準方程式を満す．次の時刻 $t+dt$ における点の q'^i と p'_i もやはり，その時刻での正準方程式を満足する．すると，時刻 t と $t+dt$ における２組の正準変数 (q,p) と (q',p') は共に正準方程式を満すから，(q,p) から (q',p') への変換は微小正準変換である．したがって，正準方程式は t をパラメータとする微小正準変換とみなせる．

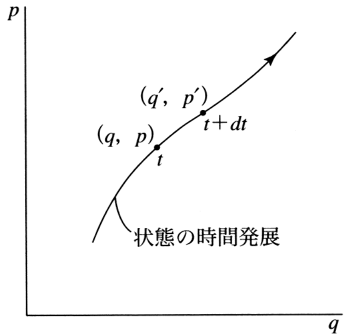


図 4.1

その微小正準変換の母関数は，正準方程式の生成演算子 (4.1.3) の X_t と (4.6.3) の X_G を見れば明らかなように，ハミルトン関数 H であり，変換パラメータは時間 t である．

こうして，**正準方程式は，位相空間において，時間 t をパラメータとし，演算子 X_H によって生成される無限小正準変換である，**ということができる．

4.7　正準変換の不変式

正準変換のもとで不変な q と p の関係式，あるいは形を変えない（共変）関係式がある．正準方程式もその一つであった．作用積分の不変性から保存量が導かれたように，一般に，変換のもとでの不変性は物理的に重要な意味を持っている．

そこで，正準変換のもとでの不変式のうちで重要なものを挙げておく．

(i) ポアソン括弧式とラグランジュ括弧式

例題 4.4 で示したように，(q,p) と (Q,P) 位相空間におけるラグランジュ括弧式は等しい，すなわち

$$[f,g]_{(q,p)} = [f,g]_{(Q,P)} \tag{4.7.1}$$

それゆえ，ラグランジュ括弧式は正準変換により不変である．

これと対応して，ポアソン括弧式も不変であることは，両括弧式は互に逆行列のような関係にあることから推測できる．(4.3.8) のように q，p を一まとめに z で表すと

$$\sum_{m=1}^{2N} \{z^l, z^m\}[z^m, z^n] = -\delta^{ln} \tag{4.7.2}$$

となるから，この式は $\{z^l, z^m\}$ を未知数とする一次連立方程式とみなせる．それゆえ $\{z^l, z^m\}$ は $[z^m, z^n]$ によって表すことができて，ラグランジュ括弧式の不変性からポアソン括弧式の不変性が結論される．

ポアソン括弧式の正準変換不変性は，シンプレクティク構造の性質 (4.5.9) を用いても直接証明できるが，その証明は省略する．

(ii) 相対積分不変式

4.4 節で示したように，正準方程式を導く作用積分を不変にするのが正準変換であった．ただし，(4.4.5) には dW/dt の任意性があった．しかし，この全微分項は閉曲線に沿った積分 $(t_1 = t_2)$ ではゼロになる．

$$\oint \frac{dW}{dt}dt = \oint dW = W(終点) - W(始点) = 0$$

$\oint$ は閉曲線に沿って一周する積分を表す．それゆえ

$$\oint (p_i \delta q^i - H\delta t) = \oint (P_i \delta Q^i - K\delta t) \tag{4.7.3}$$

となる．よって

$$\oint {}_*\Theta = \oint (p_i \delta q^i - H\delta t) = \text{一定} \tag{4.7.4}$$

は正準変換の不変式である．${}_*\Theta$ は (1.4.13) で導入された基礎変分式である．

特に，時間を一定にした変分の場合は

$$\oint p_i \delta q^i = \text{一定} \tag{4.7.5}$$

である．これをポアンカレの積分不変式と呼んでいる．

(4.7.4) や (4.7.5) のように，閉曲線（閉領域）に沿った積分に対してのみ成り立つものは，**条件つきの不変式なので，このようなものを相対積分不変式**という．

(iii) 絶対積分不変式

位相空間内のある曲面 S を考えると，その曲面上の点 (q,p) は２つのパラメータ u,v で表現できる；

$$q^i = q^i(u,v), \quad p_i = p_i(u,v) \tag{4.7.6}$$

その曲面 S 上の積分

$$J_S = \iint_S \delta q^i \delta p_i \tag{4.7.7}$$

は正準変換の不変量である．

証明：曲面 S 上の微小面積 $\delta q^i \delta p_i$（i の和はとらない）をパラメータの変分 $\delta u \delta v$ を用いて表すと，変換のヤコビアンを使って次式となる

$$\delta q^i \delta p_i = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q^i}{\partial u} & \dfrac{\partial p_i}{\partial u} \\ \dfrac{\partial q^i}{\partial v} & \dfrac{\partial p_i}{\partial v} \end{vmatrix} \delta u \delta v \quad (\text{i の和はとらない}). \tag{4.7.8}$$

この表式を i について和をとれば，(4.3.1) の定義により，右辺はラグランジュ括弧で表される；

$$\delta q^i \delta p_i = [u,v]_{(q,p)} \delta u \delta v \quad (\text{i の和をとる}) \tag{4.7.9}$$

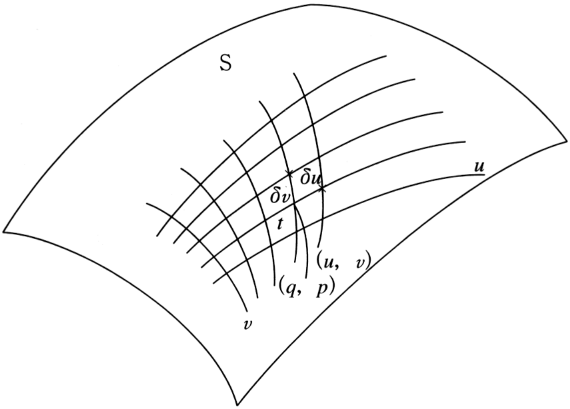


図 4.2

正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ のあと，S に対応する曲面 S' 上の微小面積を $\delta Q^i \delta P_i$ とすると，(q,p) の場合と同様に

$$\delta Q^i \delta P_i = [u,v]_{(Q,P)} \delta u \delta v \tag{4.7.10}$$

をえる．(4.7.1) によってラグランジュ括弧式は正準変換で不変である．それゆえ対応する同一曲面 S と S' 上で (4.7.9) と (4.7.10) を積分すれば

$$J_S = \iint_S \delta q^i \delta p_i = \iint_S \delta Q^i \delta P_i = \text{一定} \tag{4.7.11}$$

となる．よって J_S は不変式である．

この場合，曲面 S は任意である（閉じてなくてよい）ので，このように積分領域に制限のない不変式を絶対積分不変式という．

同様にして，

$$J_{V_4} = \int \cdots \int_{V4} \delta q^i \delta p_i \delta q^j \delta p_j = \text{一定} \tag{4.7.12}$$

も絶対積分不変式である．V_4 は位相空間の中の 4 次元体積の領域である．さらに 6 次元以上の場合も成り立つ．

(iv) リュヴィルの定理

絶対積分不変式の中で，特に重要なものは $2N$ 次元領域についての積分

$$J_{V_{2N}} = \int \cdots \int_{V_{2N}} \delta q^1 \ldots \delta q^N \delta p_1 \ldots \delta p_N = 一定 \tag{4.7.13}$$

位相空間の体積 V_{2N} の中のすべての点を正準変換によって V'_{2N} に移したとすると，V'_{2N} の形は変るが体積は変らないというのが，上式である．

ところが，正準方程式は H を母関数，t をパラメータとする微小正準変換であるから，同一位相空間内の V_{2N} と V'_{2N} の各点は正準方程式によって結ばれているわけである．すると，位相空間の中の体積は運動による移動によりその大きさを変えない，ということができる．つまり，位相空間の状態密度は一定に保たれる．これをリュヴィユの定理という．

この定理は統計力学において重要な役割を演ずる．

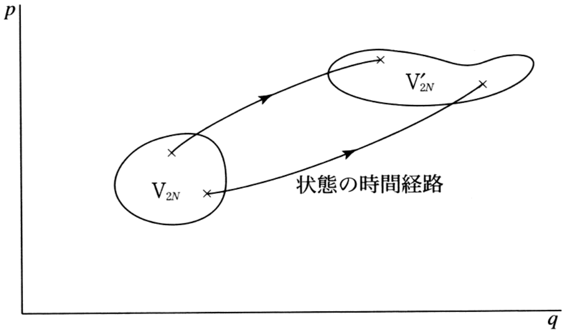


図 4.3

第 5 章

運動方程式の積分

5.1　運動の決定

これまで運動方程式とその方程式の成り立つ位相空間の性質を説明してきた．次は，その運動方程式の解を求める．つまり運動方程式の積分を求めることが問題である．

ラグランジュ方程式やハミルトンの正準方程式の解を求める方法は，昔からいろいろ開発されてきた．運動方程式の完全解は，q^i を二つの初期条件と時間 t の関数として表すことによりえられる．速度位相空間にしろ，位相空間にしろ，その微分方程式を積分すれば，ξ^i あるいは p_i が初期条件 c_i と q^i の関数として求まる；

$$\xi^i = f^i(q,t,c), \quad \text{または} \quad p_i = f_i(q,t,c) \tag{5.1.1}$$

これを

$$\xi^i = \dot{q}^i, \quad \text{または} \quad p_i = \partial L(q,\xi)/\partial \xi^i \tag{5.1.2}$$

のもとでもう一度積分して

$$q^i = F^i(t,c,c') \tag{5.1.3}$$

が求まれば，すべての質点の運動が決定されるわけである．ここに $c_i, c'_i (i = 1 \sim N)$ は二つの初期条件である．

第 1 回目の積分 (5.1.1) を第 1 積分という．第 1 積分で重要なものは，いうまでもなくエネルギーや運動量の保存則，さらには角運動量保存則である．

運動方程式の積分を論ずる目的で導かれたものにハミルトン-ヤコビ方程式がある．その定式化とその意義については改めて論ずるが，運動方程式を実際に解いて f^i や

F^i を具体的に求めなくとも，物理的に重要な性質を見出すことができる典型的な例である．ハミルトン-ヤコビ形式は，量子力学への移行において大変有益な示唆を与えた．

それにしても，運動方程式の積分を求める前に，まずその方程式が常に積分可能であるか，つまり，解が存在するかが問題である．通常のラグランジュ方程式や正準方程式は積分可能であることがわかっているので，力学の教科書ではこの問題には触れずに積分を求める方法のみ説明している．運動方程式がすべて独立の場合は，積分可能条件を満しているから，それでよいが，拘束条件のある場合は，第２章で示したように運動方程式は独立ではない．それゆえ，積分可能であるための条件が必要なのである．本書の主目的であるゲージ理論はその内的拘束条件のある系なので，運動方程式の積分可能条件を吟味しておく必要がある．

5.2　運動方程式の積分可能条件：拘束条件のある場合

第２章で導いたように，運動方程式は速度位相空間では

$$dq^i - \xi^i dt = 0, \quad (i = 1 \sim N) \tag{5.2.1}$$

$$A_{ij} d\xi^j + \frac{\partial p_i(q,\xi)}{\partial q^j} dq^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} dt = 0 \tag{5.2.2}$$

と表される．ここでは (2.1.3) と (2.1.6) の代りに，微分形で記した．ヘシアン行列 A_{ij} が正則ならば，その逆行列が存在するので，(5.2.2) は

$$d\xi^j - R^i dt = 0, \quad (i = 1 \sim N) \tag{5.2.3}$$

ただし

$$R^i \equiv -(A^{-1})^{ij} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q^k} \xi^k - \frac{\partial L}{\partial q^j} \right) \tag{5.2.4}$$

と変形される．この変形で，(5.2.1) を (5.2.2) に代入した．

他方，正準方程式は

$$dq^i - \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} dt = 0 \tag{5.2.5}$$

$$dp_i + \frac{\partial H(q,p)}{\partial q^i} dt = 0 \tag{5.2.6}$$

と表される．

このように，速度位相空間にしろ，位相空間にしろ運動方程式はそれぞれ $2N$ 個の1階微分形で書くことができる．A_{ij} が正則の場合は，これら $2N$ 個の方程式は独立である．そのとき，これら運動方程式系は積分可能なのであるが，それを示す前に，積分可能条件について，そのエッセンスを簡潔に説明しておこう．ここで少し脇道にそれる．

微分方程式系の積分可能条件 (1)(2)

まず次の簡単な例で考えてみる．未知関数 $u(x^1, x^2)$ について，微分方程式

$$\frac{\partial u(x^1, x^2)}{\partial x^1} = a_1(x^1, x^2), \quad \frac{\partial u(x^1, x^2)}{\partial x^2} = a_2(x^1, x^2) \tag{5.2.7}$$

の積分可能条件は，よく知られているように

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \tag{5.2.8}$$

である．(5.2.7) を微分形で表すと

$$\omega \equiv du - a_1 dx^1 - a_2 dx^2 = 0 \tag{5.2.9}$$

となる．

ここで (5.2.9) と同等な微分演算子を導入しよう．そのために，dx^i と双対なベクトル $\partial/\partial x^i$ との内積を次のように定義する；

$$\langle dx^i, \partial/\partial x^j \rangle = \delta^i_j \tag{5.2.10}$$

dx^i を反変ベクトル，$\partial/\partial x^i$ を共変ベクトルとみなして，内積をこのように定義することができる．

この内積を用いて，微分形 ω と直交する微分演算子 Y（ベクトル場と呼ばれる）を求めよう．つまり $\langle \omega, Y \rangle = 0$ となる Y である．

$$Y = b^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.2.11}$$

とおいて，(5.2.9) との内積がゼロになるように b^i, b をきめると，解は2つあり

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + a_1 \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.2.12}$$

をえる．ただし $\langle du, \partial/\partial x^i \rangle = 0, \quad \langle du, \partial/\partial u \rangle = 1$ とする．

ω と直交する微分演算子系 Y_1, Y_2 を ω の生成系という[*)].

ここで，生成系 Y_α の交換子積

$$[Y_1, Y_2] \equiv Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1 \tag{5.2.13}$$

を，$\partial a_1/\partial u = \partial a_2/\partial u = 0$ に注意して求めると $Y_\alpha (\alpha = 1, 2)$ の表式から

$$[Y_1, Y_2] = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.2.14}$$

をえる．これは，(5.2.8) の積分可能条件を用いるとゼロである；

$$\therefore \quad [Y_1, Y_2] = 0 \tag{5.2.15}$$

逆に，Y_1, Y_2 が交換可能ならば，(5.2.8) が満されて，微分方程式 (5.2.7)，または微分形 ω は積分可能となる．

実際に，(5.2.8) から，ある関数 $f(x^1, x^2)$ によって

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} \tag{5.2.16}$$

と表される．これを ω に代入して

$$\omega = du - \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 - \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 = d(u - f) = 0$$

よって，ω の積分として

$$F = u - f = c \tag{5.2.17}$$

をえる．c は定数．

この積分 F は Y_α の解である；

$$Y_1 F = \frac{\partial u}{\partial x^1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial u} = a_1 - a_1 = 0$$

ただし，(5.2.16) と，$f = u + c$ を用いた．Y_2 についても同様である．

このように，もとの微分方程式系と同等な微分形（一般には 1 つとは限らない）と直交する生成系の交換子積がゼロのとき，その微分方程式は積分可能である．

注*）このような生成系と類似のものは，すでに正準方程式系で導入した．(5.2.5)，(5.2.6) と同等な微分演算子として (4.1.3) を用いた．(4.1.3) の X_t が (5.2.5)，(5.2.6) と直交していることは $\langle dq^i, \partial/\partial q^i \rangle = \langle dp_i, \partial/\partial p_j \rangle = \delta_i^j$，$\langle dq^i, \partial/\partial p_j \rangle = \langle dp_i, \partial/\partial q^j \rangle = 0$ を用いれば容易に確かめられる．

この条件は実はきつ過ぎるのである．一般的には，Y_1, Y_2 の交換子積が，Y_1 と Y_2 の 1 次結合 (1 次式) で表されるならば，積分可能であることが証明されている [(1),(2)]．

ここで示した例を一般化したものが，積分可能条件に関するフロベニウスの定理である．

フロベニウスの定理（積分可能条件）

N 個の変数 $x^i(i = 1 \sim N)$ に関する微分形

$$\omega_\alpha = a_{\alpha i}(x)dx^i = 0, \quad (\alpha = 1 \sim \mu \leq N) \tag{5.2.18}$$

と直交する ω の生成系 $Y_k(k = 1 \sim K)$ のうちのどの交換子積も Y_k の 1 次結合で表されるとき；

$$[Y_k, Y_l] \equiv 0 \quad \text{mod.}(Y) \qquad (k, l = 1 \sim K) \tag{5.2.19}$$

このとき ω は完全積分可能である．そのとき $\omega_\alpha = dF_\alpha = 0$ となる μ 個の積分 $F_\alpha = c_\alpha$ が存在する*)．

生成系 Y_k が (5.2.19) を満すとき，集合 $\{Y_k\}$ **は交換子積について閉じている**という．交換子積が厳密にゼロでなくとも，$Y_k = 0$ のもとで消えるとき (5.2.19) の右辺のように表す．

ラグランジュ方程式の積分可能条件 [(3)]

ラグランジュ方程式でヘッシアン行列 A_{ij} が正則のとき，その方程式は (5.2.1) と (5.2.3) である．それら N 個ずつの方程式はすべて独立である．これら $2N$ 個の微分形式と直交する微分演算子を**)

$$X_t = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.20}$$

とおくと，X_t と (5.2.1) および (5.2.3) との直交条件

$$\langle dq^i - \xi^i dt, X_t \rangle = 0, \quad \langle d\xi^i - R^i dt, X_t \rangle = 0$$

注*) フロベニウスの定理は，もとは外微分形式を用いて，ω_α のみ用いて表現された．この定理の厳密な証明は，文献 1 を参照されたい．ここでは簡単な実例を示すのみにとどめる．

注**) $dq^i, d\xi^i$ に双対な $\partial/\partial q^i, \partial/\partial \xi^i$ との内積は，次のように定義する；

$$\langle dq^i, \partial/\partial q^j \rangle = \langle \partial\xi^i, \partial/\partial \xi^j \rangle = \delta^i_j, \quad \langle dq^i, \partial/\partial \xi_j \rangle = \langle d\xi^i, \partial/\partial q^j \rangle = 0$$

また $\langle dt, \partial/\partial t \rangle = 1$ である．

から

$$a^i - \xi^i = 0, \quad b^i - R^i = 0$$

をえる．よって

$$X_t = \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + R^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.21}$$

をえる．X_t は全体にかかる因子を除いて一義的に決まる．その不定因子は時間のスケールにかかわるものであるから，時間の単位を 1 として (5.2.21) を運動の生成演算子とする．

ここで，大切なことは $2N$ 個のこれら運動方程式系の生成系は唯一 X_t のみであるということである．

ところで，ただ 1 個の生成系の交換子積は閉じている．なぜならば，自分自身との交換子積はゼロだからである．したがって，フロベニウスの定理により，**生成系が唯一 X_t であるラグランジュ方程式系 (5.2.1)，(5.2.3) は積分可能である．**

ちなみに，(5.2.21) の X_t は時間発展の演算子である．実際に，X_t から運動方程式が導かれる；

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= X_t q^i = \xi^i \\ \dot{\xi}^i &= X_t \xi^i = R^i \end{aligned}\right\} \tag{5.2.22}$$

このように，**$2N$ 個の独立変数 q^i, ξ^i の運動方程式系において，$2N$ 個の方程式がすべて独立ならば，その運動方程式系は積分可能であり，$2N$ 個の第 1 積分が存在する．**

次に，A_{ij} が正則でない，すなわち運動方程式が独立でない場合を吟味しよう．A_{ij} の階数を $N-R$ とする；

$$\mathrm{rank}(A_{ij}) = N - R$$

すると，2.1 節で述べたように，R 個のゼロ固有値ベクトル τ^i_α が存在して

$$A_{ij}\tau^j_\alpha = \tau^j_\alpha A_{ji} = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{5.2.23}$$

τ^i_α は一般的には q^i, ξ^i の関数である．この τ^j_α をラグランジュ方程式の (5.2.2) に乗じて，i で和をとれば，$d\xi^i$ は消えて拘束条件

$$\Phi_\alpha(q,\xi) = \tau^i_\alpha \left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\xi^j - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{5.2.24}$$

が現われる．この Φ_α は (2.1.15) そのものである．この式は R 個の ξ^α が独立でないことを意味する．

運動方程式 (5.2.2) のうちで，残る $N-R$ 個は独立である．それを

$$A_{lj}d\xi^j + \frac{\partial p_l}{\partial q^j}dq^j - \frac{\partial L}{\partial q^l}dt = 0, \quad (l = 1 \sim N-R) \tag{5.2.25}$$

とする．A_{lj} の階数は $N-R$ である．この $N-R$ 個の微分形式と (5.2.1) に直交する生成系を求めてみよう．(5.2.20) の X_t との内積をとり，ゼロとおくと

$$a^i - \xi^i = 0, \quad A_{lj}b^j + \frac{\partial p_l}{\partial q^j}a_j - \frac{\partial L}{\partial q^l} = 0$$

となる．a^i は決まるが，b^j は一義的でない．上の第 2 式で $N-R$ 個の b^l は決まっても R 個の b^α はまだ不定のままである．その b^α は拘束条件 (5.2.24) の Φ_α との内積

$$\langle d\Phi_\alpha, X_t\rangle = 0,$$

$$d\Phi_\alpha(q,\xi) = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q^i}dq^i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \xi^i}d\xi^i = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{5.2.26}$$

によって決るものがある．しかし，これでもまだ定まらず，最後まで任意のまま残る場合がある．その場合は，任意の b^β の数だけの微分演算子が X_t 以外に存在することになる．

ラグランジュ方程式系は N 個の (5.2.1) と $N-R$ 個の (5.2.25)

$$\left.\begin{aligned} &dq^i - \xi^i dt = 0, \quad (i = 1 \sim N), \\ &A_{lj}d\xi^i + \frac{\partial p_l}{\partial q^i}dq^i - \frac{\partial L}{\partial q^l}dt = 0, \quad (l = 1 \sim N-R) \end{aligned}\right\}$$

および R 個の拘束条件 (5.2.26) からなるというわけである．したがって全部で $2N$ 個のこれら微分形式の生成系は，X_t の他に，任意のまま残った b^β に対応して $Z_\beta = \tau^i_\beta \partial/\partial\xi^i$ という微分演算子*) が存在することになる．したがって，生成系は

$$X_t, Z_\beta, \quad (\beta = 1 \sim r \leq R) \tag{5.2.27}$$

とからなる．ここで重要なことは，この生成系が交換子積について閉じているかどうかということである．特別な場合を除き，一般的には，閉じていないのである．すると，このラグランジュ方程式はこのままでは積分可能ではないことになる．積分可能であるようにするには，その生成系に新たに $[X_t, Z_\beta]$ によって生ずる微分演算子を

注*) Z_β について第 9 章 9.2 節で説明する．

次々につけ加えて閉じた生成系を作るのである．それに関する詳しい説明は第９章 9.2 節で行う．

特異（非正則）ラグランジュ関数から導かれる拘束条件のあるラグランジュ方程式は，そのままでは積分可能とは限らない．条件つきで積分可能となることをここで指摘しておくにとどめる．

例題 5.1. 正則ラグランジュ関数

２質点の一次元運動で，次のラグランジュ関数をとる．

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1)^2 + \frac{1}{2}(\xi^2)^2 - \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2.28}$$

運動方程式は

$$\left.\begin{array}{l} dq^1 - \xi^1 dt = 0, \quad dq^2 - \xi^2 dt = 0, \\ d\xi^1 + (q^1 - q^2)dt = 0, \quad d\xi^2 - (q^1 - q^2)dt = 0 \end{array}\right\} \tag{5.2.29}$$

となる．これら微分形式に直交する運動の生成子はただ一つ

$$X_t = \xi^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial q^2} - (q^1 - q^2)\frac{\partial}{\partial \xi^1} + (q^1 - q^2)\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.30}$$

であり，生成系は閉じている．それゆえ，(5.2.29) は完全積分可能であって，４つの第１積分が存在する．まず，第３，第４式を加えて，

$$d(\xi^1 + \xi^2) = 0 \qquad \therefore \quad \xi^1 + \xi^2 = c_1 \tag{5.2.31}$$

をえる．これは運動量保存則である．次に第１，第２式を加えて，(5.2.31) を用いると，

$$d(q^1 + q^2) - c_1 dt = 0, \qquad \therefore \quad q^1 + q^2 - c_1 t = c_2 \tag{5.2.32}$$

これは重心の運動を与える積分である．

第３式に ξ^1，第４式に ξ^2 を乗じたものを加え，第１，第２式を用いると

$$\xi^1 d\xi^1 + \xi^2 d\xi^2 + (q^1 - q^2)(dq^1 - dq^2) = 0$$

をえる．これよりエネルギー保存則が導かれる；

$$\frac{1}{2}(\xi^1)^2 + \frac{1}{2}(\xi^2)^2 + \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 = c_3 \tag{5.2.33}$$

最後に，第 3 式から第 4 式を引き，

$$d(\xi^1 - \xi^2) - 2(q^1 - q^2)dt = 0.$$

これに $(\xi^1 - \xi^2)$ を乗じて，第 2 項に (5.2.29) の第 1，第 2 式を代入すると

$$(\xi^1 - \xi^2)d(\xi^1 - \xi^2) - 2(q^1 - q^2)d(q^1 - q^2) = 0$$

これを積分して相対運動の式

$$\frac{1}{2}(\xi^1 - \xi^2)^2 - (q^1 - q^2)^2 = c_4 \tag{5.2.34}$$

をえる．

これで 4 つの第 1 積分が求まり，この系は完全積分可能であることが示された．

例題 5.2.　非正則ラグランジュ関数の場合

さきの例題 2.2 の拘束系をもう一度とりあげる．

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1 - \xi^2)^2 - \xi^1 q^2 - \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2, \quad (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.2.35}$$

運動方程式は

$$\left.\begin{array}{l} dq^1 - \xi^1 dt = 0, \quad dq^2 - \xi^2 dt = 0, \\ d\xi^1 - d\xi^2 - dq^2 + (q^1 - q^2)dt = 0, \\ d\xi^1 - d\xi^2 - dq^1 + (q^1 - q^2)dt = 0, \end{array}\right\} \tag{5.2.36}$$

この方程式系の第 3 式と第 4 式は独立ではなく，拘束条件 $dq^1 - dq^2 = 0$ が生ずる．生成系を求めるために，X_t を (5.2.20) のように置き，(5.2.36) との直交条件から

$$a^i = \xi^i, \quad b^1 - b^2 - a^2 + q^1 - q^2 = 0, \quad a^1 = a^2 = \xi^1 = \xi^2$$

をえる．よって

$$X_t = \xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \right) + \left(\xi^1 - q^1 + q^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi^1} + b^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.37}$$

となる．ここで b_2 は未定である．そこで，X_t と拘束条件

$$d\Phi = dq^1 - dq^2 = 0 \tag{5.2.38}$$

との直交条件を吟味してみると，自動的に満されており，b^2 は定まらず任意のまま残る．それゆえ，b^2 の係数因子は X_t から分離して独立の生成系の微分演算子となる．

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \tag{5.2.39}$$

この Z_1 は運動方程式 (5.2.36) と拘束条件 (5.2.38) と直交することは容易にわかる．こうして，この場合の生成系は，X_t から b^2 項を落としたものと Z_1 とからなる．

そこで改めて

$$\bar{X}_t = \xi^1 \left(\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \right) + \left(\xi^1 - q^1 + q^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.40}$$

と定義し，$(\bar{X}_t, Z_1)$ が生成系である．

ところが，この生成系は閉じていない．なぜならば，

$$[\bar{X}_t, Z_1] = -\left(\frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \tag{5.2.41}$$

であるが，この右辺は $\bar{X}_t$ と Z_1 の 1 次結合では表せないからである．それゆえ，このままでは運動方程式は積分可能ではない．(5.2.41) を新たに Y_1 とおきそれを生成系に追加しなければならない．それと同時に，新拘束条件が現われるのである．

正準方程式の積分可能条件

ラグランジュ方程式の場合と本質的には同じであるから，ほぼ並行してやれるが，少し形式の異なるところがある．

ヘシアン行列 A_{ij} が正則であれば，2.2 節で説明したように，ハミルトン関数は一義的にきまる．そのとき，正準方程式 (5.2.5)，(5.2.6) はすべて独立である．それゆえ，その微分形式と直交する運動の生成演算子は，ただ一つ

$${}_*X_t = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.42}$$

であることは容易にわかる．左下の $*$ 印は例によって位相空間の量を示す．ただ 1 つの生成系は閉じているから，正準方程式 (5.2.5)，(5.2.6) は積分可能であり，$2N$ 個の第 1 積分が存在する．

次に，A_{ij} が非正則で，その階数が $N-R$ としよう．2.2 節で示したように，この場合は，R 個の p_α は独立でなく，拘束条件

$${}_*\Phi_\alpha(q, p) = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{5.2.43}$$

が現われる．そして，H は一義的に決まらず，R 個の不定変数 $\dot{q}^\alpha$ が H の中に残る；$H(p,q,\dot{q}^\alpha)$．したがって，(5.2.6) の微分形式は独立でなく，不定の $\dot{q}^\alpha$ が入るので，${}_*X_t$ は一義的にきまらない．そして，生成系は ${}_*X_t$ の他にいくつか存在する．${}_*X_t$ を次のようにおき

$$
{}_*X_t = a_i \frac{\partial}{\partial q^i} + b^i \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.44}
$$

これと運動方程式および拘束条件の微分形

$$
d_*\Phi_\alpha = \frac{\partial_*\Phi_\alpha}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial_*\Phi_\alpha}{\partial p_i} dp_i = 0 \tag{5.2.45}
$$

を用いて a_i, b^i を求めるのであるが，一義的に定まらず任意のまま残るものもある．その場合は，任意の a_β, b_β の係数を分離して生成系に加え，(任意の a_β, b_β をゼロとした ${}_*\bar{X}_t$ をとる)

$$
\left({}_*\bar{X}_t,\ {}_*Y_\beta \quad (\beta = 1 \sim r)\right) \tag{5.2.46}
$$

を生成系とするのである．ラグランジュ形式のときと同様に，この生成系は一般に閉じてない．それゆえ，このままでは，正準方程式と拘束条件とは積分可能ではない．$[{}_*X_t, {}_*Y_\beta]$ から新たに生じたものを生成系 (5.2.46) に追加していくのである．

例題 5.3．正則系の正準方程式

例題 5.1 の力学系のハミルトン関数は

$$
H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 \tag{5.2.47}
$$

運動方程式は

$$
\begin{aligned}
dq^1 - p_1 dt = 0, &\quad dq^2 - p_2 dt = 0, \\
dp_1 + (q^1 - q^2)dt = 0, &\quad dp_2 - (q^1 - q^2)dt = 0
\end{aligned} \tag{5.2.48}
$$

これらの式はすべて独立である．運動の生成演算子は容易に求まって

$$
{}_*X_t = p_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q^2} - (q^1 - q^2)\frac{\partial}{\partial p_1} + (q^1 - q^2)\frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.2.49}
$$

である．生成系は ${}_*X_t$ のみであるから閉じている．よって正準方程式はすべて積分可能である．

(5.2.48) の第３，第４式より運動量保存則

$$d(p_1+p_2)=0 \qquad \therefore \quad p_1+p_2=c_1 \tag{5.2.50}$$

をえる．第１，第２と (5.2.50) から

$$d(q^1+q^2)-c_1dt=0 \qquad \therefore \quad q^1+q^2-c_1t=c_2. \tag{5.2.51}$$

エネルギー積分は，第３，第４式にそれぞれ p_1,p_2 を乗じて加えると得られる；

$$p_1dp_1+p_2dp_2+(p_1-p_2)(q^1-q^2)dt=0$$

この第２項に (5.2.48) の第１，第２式を代入して p_idt を消去すれば

$$\frac{1}{2}d(p_1^2+p_2^2)+(q^1-q^2)(dq^1-dq^2)=0.$$

これより

$$\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}(q^1-q^2)^2=c_3 \tag{5.2.52}$$

をえる．

最後の積分は，第３式から第４式を引き，その式に (p_1-p_2) を乗じて，第１，第２式を用いれば

$$(p_1-p_2)d(p_1-p_2)+2(q^1-q^2)d(q^1-q^2)=0$$

となる．これより

$$\frac{1}{2}(p_1-p_2)^2+(q^1-q^2)^2=c_4 \tag{5.2.53}$$

をえる．

例題 5.4．非正則系の正準方程式

再び例題 5.2 の力学系をとる．ハミルトン関数は (2.2.13)，拘束条件は (2.2.12) である．（不定の ξ^1 を未定関数 λ とおく．）

$$H=\frac{1}{2}(p_2)^2+\frac{1}{2}(q^1-q^2)^2+\lambda_*\Phi, \tag{5.2.54}$$

$${}_*\Phi=p_1+p_2+q^2=0 \tag{5.2.55}$$

正準方程式として

$$\begin{aligned} &dq^1 - \lambda dt = 0, \quad dq^2 - (p_2 + \lambda)dt = 0, \\ &dp_1 + (q^1 - q^2)dt = 0, \quad dp_2 - (q^1 - q^2 - \lambda)dt = 0 \end{aligned} \tag{5.2.56}$$

をえる．この 4 式は独立でない．第 1 式を用いて，他の式の λ を消去すると

$$\left.\begin{aligned} &dq^1 - dq^2 + p_2 dt = 0, \quad dp_1 + (q^1 - q^2)dt = 0, \\ &dq^1 + dp_2 - (q^1 - q^2)dt = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.2.57}$$

となる．これら 3 式と拘束条件

$$d_*\Phi = dp_1 + dp_2 + dq^2 = 0 \tag{5.2.58}$$

がこの力学系の方程式である．運動の生成演算子 ${}_*X_t$ を (5.2.44) とおいて，上の 4 式との直交条件を求めると

$$a^1 - a^2 + p_2 = 0, \quad b_1 + q^1 - q^2 = 0, \quad b^2 + a^1 - q^1 + q^2 = 0$$

および

$$b_1 + b_2 + a^2 = 0$$

をえる．この第 2，第 3 式から

$$b^1 + b^2 + a_1 = 0$$

となるから，第 4 式より $a_1 = a_2$ である．すると第 1 式より，新たな拘束条件

$${}_*\Phi_2 = p_2 = 0 \tag{5.2.59}$$

をえる．結局 a^1 は未定の任意関数として残るから，${}_*X_t$ の中で a^1 の因子を独立演算子として分離し，生成系として

$$\left.\begin{aligned} {}_*\bar{X}_t &= p_2 \frac{\partial}{\partial q^2} - (q^1 - q^2)\left(\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial p_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t} \\ {}_*Y_1 &= \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\partial}{\partial q^2} - \frac{\partial}{\partial p_2} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.60}$$

をえる．この ${}_*\bar{X}_t$ と ${}_*Y_1$ はそれぞれ (5.2.57)，(5.2.58) と直交することは容易に確かめられる．この生成系は閉じていない．新たな

$$[{}_*\bar{X}_t,\ {}_*Y_1] = \frac{\partial}{\partial q^2} \equiv {}_*Y_2 \tag{5.2.61}$$

を生成系に加えねばならない．それとともに拘束条件 (5.2.59) が新たに登場するのである．これ以後の話は第 7 章にゆずる．

5.3 運動方程式の第 1 積分

この節では，もっぱら正準方程式の積分の求め方の一般論を考察する．

第 1 積分は一般に，c を積分定数として

$$f(q,p) = c$$

のように表される．

ポアソン括弧を利用した第 1 積分の求め方．

いま，t を陽に含まないある関数 $f(q,p)$ をとると，(4.2.1) により

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \tag{5.3.1}$$

である．よって

$$\{f, H\} = 0 \tag{5.3.2}$$

ならば

$$f(q,p) = c \tag{5.3.3}$$

となり，f は時間的に一定であり，第 1 積分である．

一般に，２つの関数 $u(q,p), v(q,p)$ が

$$\{u, v\} = 0 \tag{5.3.4}$$

のとき，u と v は抱合の関係（involutive）にあるという．

それゆえ，***H* と抱合の関係にあるものは，時間的に一定であり，正準方程式の第 1 積分である．**

このことから，次のような第 1 積分が存在する．

1）エネルギー積分

ポアソン括弧の反対称性 (4.2.4) から

$$\{H, H\} = 0 \tag{5.3.5}$$

したがって，$H(q,p)$ は時間的に一定である；

$$H(q,p) = E = 一定 \tag{5.3.6}$$

2）H が q^ν を含まぬとき（q^ν は循環座標：例題 3.2 参照），第 1 積分は

$$p_\nu = c \quad \text{(一般化運動量保存則)} \tag{5.3.7}$$

なぜならば，

$$\{p_\nu, H\} = \frac{\partial p_\nu}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_\nu}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\delta_{i\nu}\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{\partial q^\nu} = 0 \tag{5.3.8}$$

だからである．

3）q^ν と p_ν が H の中に一塊りとなって一つの関数 $F(q^\nu, p_\nu)$ の形で入っているとき，F は第 1 積分である；

$$F(q^\nu, p_\nu) = c \tag{5.3.9}$$

なぜならば，ν 以外の添字 k に対して

$$\{q^k, F\} = 0, \quad \{p_k, F\} = 0. \tag{5.3.10}$$

よって，

$$\{F, H\} = \{F, F\}\frac{\partial H}{\partial F} + \{F, q^k\}\frac{\partial H}{\partial q^k} + \{F, p_k\}\frac{2H}{\partial p_k} = 0 \tag{5.3.11}$$

となるからである．

4）$F(q,p)$ と $G(q,p)$ が第 1 積分ならば $\{F,H\} = \{G,H\} = 0$ ゆえ，$\{F,G\}$ も第 1 積分である．

なぜならば，ヤコビの恒等式 (4.2.11) により

$$\{\{F,G\},H\} = -\{\{G,H\},F\} - \{\{H,F\},G\} = 0. \tag{5.3.12}$$

よって $\{F,G\}$ も第 1 積分である．このように 2 つの積分から新たな積分が導かれる．

この性質によって，2 つの積分をもとにして次々に新たな第 1 積分が求まりそうであるがそう巧くはいかない．次々にポアソン括弧を計算すると，すでにえられた積分と独立ではないものか，または定数がでてきて，多くの新積分が求るわけではない．

5）微小正準変換の母関数 $G(q,p)$ によって H が不変ならば G は第 1 積分である；

$$G(q,p) = c \tag{5.3.13}$$

なぜならば，(4.6.5) において，f として H をとると，

$$dH = \{G, H\}ds \tag{5.3.14}$$

G による微小正準変換で H が不変のとき，$dH=0$ だから G は H と抱合関係にある．よって (5.3.13) をえる．

例題 5.5. 第 1 積分の求め方 4）の例

3 次元球対称ポテンシャルによる質点の運動で，周知のように角運動量は保存するから第 1 積分である；

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} = \text{一定} \tag{5.3.15}$$

太字は 3 次元ベクトルを表す．

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(|\,\boldsymbol{x}\,|) \tag{5.3.16}$$

であるから，実際に $\boldsymbol{l}$ の各成分について，直接計算すると

$$\{\boldsymbol{l}_1, H\} = \{\boldsymbol{l}_2, H\} = \{\boldsymbol{l}_3, H\} = 0 \tag{5.3.17}$$

である．そこで，4）により $\{\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2\}$，$\{\boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3\}$ などは第 1 積分であるが，

$$\{\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2\} = \boldsymbol{l}_3, \quad \{\boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3\} = \boldsymbol{l}_1, \quad \{\boldsymbol{l}_3, \boldsymbol{l}_1\} = \boldsymbol{l}_2 \tag{5.3.18}$$

となり，新たな積分はえられない．

5.4 ハミルトン-ヤコビ方程式

位相空間内で力学系の状態を代表する点 (q,p) は時間とともに一般には移動するが，正準変換 $(q,p) \to (Q,P)$ によって，新たな位相空間内で (Q,P) が定点となるような変換が存在しうる．すなわち，a^i, b_i を定数として

$$Q^i = a^i, \quad P_i = b_i \quad (i = 1 \sim N). \tag{5.4.1}$$

この正準変換の母関数 W の独立変数を q^i, P_i としよう．すると，この変換により

$$q^i(t), p_i(t) \to a^i, b_i$$

となるのであるから，W は当然時間 t を陽に含む；$W(q,P,t)$ として (4.4.11) により

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial W}{\partial P_i} \tag{5.4.2}$$

$$K(a,b) = H(q,p,t) + \frac{\partial W}{\partial t} = \text{一定} \tag{5.4.3}$$

と表される．この定数 $K(a,b)$ をゼロとすれば

$$\frac{\partial W(q,b,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0 \tag{5.4.4}$$

となる．この方程式は W を未知関数とする非線形微分方程式である．この (5.4.4) をハミルトン-ヤコビ方程式といい，W をハミルトンの主関数という．この方程式の解 W を求めれば，正準変換の $2N$ 個の式

$$p_i = \frac{\partial W(q,b,t)}{\partial q^i}, \quad a^i = \frac{\partial W(q,b,t)}{\partial b_i} \tag{5.4.5}$$

から，代数的に $q^i(t), p_i(t)$ が定まる．

ハミルトン-ヤコビ方程式の独立変数は $N+1$ 個の $q^i(i=1\sim N)$ と t である．W の中の b_i は定数であるから，W を q^i, t の関数とみれば，(5.4.4) の微分方程式の完全解は $N+1$ 個の積分定数 c^i, c_{N+1} を含むものである；

$$W = W(q^i, t;\ c_i) + c_{N+1} \tag{5.4.6}$$

$N+1$ 番目の積分定数 c_{N+1} が付加定数となるのは，(5.4.4) は W の微分のみ含み W は生に現われないからである．

ハミルトン・ヤコビ方程式

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial W(q,t)}{\partial t} = 0 \tag{5.4.7}$$

を解くのは，実は正準方程式を解くのと数学的に同等である．それゆえ，問題の解放が簡単になるわけではない．しかし，(5.4.7) を解かなくとも，この微分方程式の性質を吟味することで，いくつかの物理的に新しい事柄が明らかにされたのである．つまり視点が変れば新たな側面が見えることもある事例の一つである．その特徴的なものを以下に紹介する．

ハミルトンの主関数 W は作用積分である．

W を (q,t) の関数とすると

$$dW(q,t) = \frac{\partial W}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial W}{\partial t} dt. \tag{5.4.8}$$

これと (5.4.5) から

$$\frac{dW}{dt} = p_i \dot{q}^i + \frac{\partial W}{\partial t} = p_i \dot{q}^i - H + \left(H + \frac{\partial W}{\partial t}\right) = L + \left(H + \frac{\partial W}{\partial t}\right) \tag{5.4.9}$$

ここでハミルトン-ヤコビ方程式を用いると右辺は L である．よって

$$W(q,t) = \int_{t_0}^{t} L(q,\dot{q},t)dt \tag{5.4.10}$$

ただし，この積分は運動経路に沿ったものである．なぜならば，この表式はハミルトン-ヤコビ方程式のもとで成立するからである*)．

ハミルトン-ヤコビ方程式は，q^i, t を独立変数とし，W を未知関数とした微分方程式であるが，(5.4.5) において，q^i, p_i を改めて独立変数とみなすならば，その第 1 式は q^i, p_i, t と積分定数 b_i との関係式となる．それゆえ，(5.4.5) の第 1 式は N 個の第 1 積分とみることができる．こうしてみると，ハミルトン-ヤコビ方程式は，運動方程式の積分を求めるための手段を開発したものといえる．事実ハミルトンは，主関数の方法は問題を「解く」ためであり，これに対してラグランジュ関数は問題を「陳述する」ものだと述べている．すなわち，主関数は積分を与えるのに対して，ラグランジュ関数は方程式を与えるだけだというわけである．

粒子運動と波動伝播のアナロジー

1 質点の運動を 3 次元直交座標 x, y, z, t で表すと，(5.4.5) は

$$p_x = \frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial z} \tag{5.4.11}$$

となる．

いま W を一定にするような x, y, z の全体を考えると，t を固定すればそれは一つの曲面をつくる．

$$W(x,y,z,t) = 0 \tag{5.4.12}$$

それゆえ，時刻 t を $t_1, t_2 \cdots$ と変えるごとに，一つの曲面が決まる．ところが，

$$\frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial y}, \quad \frac{\partial W(x,y,z,t)}{\partial z}$$

は $W=$ 一定の曲面上の 1 点 $P(x,y,z)$ における法線の x, y, z 成分である．すると，(5.4.11) は 1 点 P における質点の運動量 p_x, p_y, p_z がその法線方向を向いていることを示している．質点の運動方向は $\boldsymbol{p}$ と一致する．したがって，時間の経過とともに

注*）ちなみに，主関数の表式 (5.4.10) の変分からもハミルトン-ヤコビ方程式は導かれる．

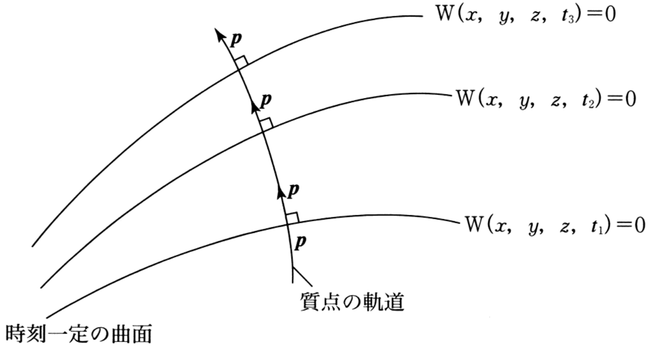


図 5.1

次々に W 一定の曲面をつくると，質点はその局面に垂直に運動することになる．質点の初期位置を変えれば別の軌道を描くが，それらの軌道はすべてその曲面に垂直である．

そこで，この W 一定の曲面を波の伝播する波面と考えるならば，この曲面の時間的移動は波面の伝播とみなすことができるから，質点の運動をその波の伝播と対応させることができる．実際に，ある点を波源として，その波が伝播する波面の方程式は，ハミルトン-ヤコビ方程式を満すことが示される．

質点の運動と波動の伝播とは異なるものであるが，数式の上ではこのような対応がつけられる．この解釈は方程式を解かずにえられた重要な物理的成果である．

後に，光の粒子性など，ミクロ実体の粒子-波動の二重性が発見され，ハミルトン-ヤコビ方程式が量子力学への橋渡しとなったことはよく知られている．

文献

(1) 松田道彦著『外微分形式の理論』(岩波書店 1975)

(2) L. P. Eisenhart; Continous Groups of Transformations (Dover Publication, INC New York 1961)

(3) 木村利栄，菅野礼司『微分形式による解析力学』改訂増補版（吉岡書店 1996)

第 6 章

場の理論への拡張

6.1　質点系と場の系との対応

これまでは，有限自由度の質点系の力学理論を論じてきたが，空間に連続的に分布して存在する場の運動を扱う方法を述べる．場の理論としては，電磁場，ヤン-ミルス場，核力場，重力場などがある．

場という実体を力学的に記述するには，空間の各点における場の強さの時間的変化を問題にすることになるから，自由度が無限大の力学系を扱わねばならない．そのような系は空間の各点ごとに質点が連続的に分布していると思えばよい．したがって，質点系の力学変数 $q^i(t)$ の代りに $\phi^a(x)$ という場の量が導入される．x は空間座標 $\boldsymbol{x}$ と時間座標 $x^\circ = ct$ をまとめて表記した 4 次元座標である．また，上つき添字 a は場の成分を表すが，a はベクトルやテンソル成分の他にスピノール成分のように，場のスピン自由度を表すと同時に，荷電スピンなどのように場の内部自由度も含めた成分を代表するものとする．したがって，場 $\phi^a(x)$ は空間-時間の各点 x に a のとりうる数だけの自由度を有することになるから，$q^i(t)$ の自由度を表す添字 i が ϕ の空間座標 $\boldsymbol{x}$ と a に対応する．

たとえば，電磁場は $A_\mu(x)$ と表し，μ は 4 次元時空のベクトル成分である．ヤン-ミルス場は $A^a_\mu(x)$ と記す．a は荷電スピンなど内部対称性の成分を，μ は電磁場と同じベクトル成分である．

質点系で定式化した前章までの説明は，この自由度の違いを正しく考慮すれば，ほとんどそのまま通用する．しかし，場の理論では，$\phi^a(x)$ の時間微分ばかりでなく，空間微分も現われる．そして，時間-空間に関するローレンツ変換のもとでの共変性

を保つように要請すると，質点形のときにはなかった新たな様相が加わる．

そこで本章では，質点系の定式化を場の理論に移すときの手続きを述べ，さらに質点にはなかった，新たに付け加えるべきことを簡単に触れることにする．

まず，力学変数の移行

$$q^i(t) \to \phi^a(\boldsymbol{x}, t) = \phi^a(x), \quad (a = 1 \sim A) \tag{6.1.1}$$

で，i は (x, a) に対応するから，自由度 i についての和は次のようになる；

$$\sum_i \to \int d^3x \sum_a \quad \text{(積分は場の存在する全空間)} \tag{6.1.2}$$

速度位相空間での力学変数は，$\phi^a(x)$ とその時間微分

$$\phi^a(x), \quad \partial_0\phi^a(x) \equiv \dot{\phi}^a(x) \equiv \xi^a(x) \tag{6.1.3}$$

$(\partial\phi/\partial x^\mu = \partial_\mu\phi$ を $\phi_{,\mu}$ と略記する*)）であって，空間微分 $\partial_i\phi^a(x) \equiv \partial\phi^a(x)/\partial x^i$ は独立な力学変数でないことに注意すべきである．

ラグランジュ関数は，その変数を全部書くと，$\boldsymbol{L}(\phi^1(x), \ldots \phi^A(x); \phi^1_{,\mu}(x) \ldots, \phi^A_{,\mu}(x))$ となるが，質点系での略記法 $L(q, \dot{q})$ に対応して，$\boldsymbol{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x))$ または $\boldsymbol{L}(\phi, \phi_{,\mu})$ と記す．太字 $\boldsymbol{L}$ は，時空点 x^μ でのラグランジュ関数密度を表す．系の全ラグランジュ関数はそれを全空間にわたって積分したものである；

$$L(\phi, \phi_{,\mu}) = \int d^3x \boldsymbol{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x)). \tag{6.1.4}$$

ラグランジュ関数とその密度とを区別するために，後者を太字で表す．

位相空間での力学変数は，ϕ^a とその正準共役変数 $\pi_a(x)$ で

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x))}{\partial \dot{\phi}^a(x)} \tag{6.1.5}$$

によって定義される．

注*）4次元時空のミンコフスキー空間の計量テンソルを $\eta_{\mu\nu}(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ と記し，$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．時間変数は $x_0 = ct$ である．

6.2　変分法

質点系の場合に第 1 章で述べた，作用積分の変分と，それによって導かれるラグランジュ方程式やハミルトン正準方程式などについて場の理論へ拡張した形式を記しておく．

前節で述べた $\boldsymbol{L}(\phi, \phi,_\mu(x))$ は，質点系の場合の $L(q, \dot{q})$ に対応するから，作用積分はそれを時間 t で積分したものである；

$$J(\phi) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \boldsymbol{L}(\phi(x), \phi,_\mu(x)) \equiv \int d^4x \boldsymbol{L}(\phi(x), \phi,_\mu(x)) \tag{6.2.1}$$

この作用積分の両端を固定した変分をゼロとおくことにより，場の運動方程式がえられる．時空点 x^μ における場の量の変分 $\delta\phi^a(x)$ を考えて

$$\delta J(\phi) = \int d^4x' \left[\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x'), \phi,_\mu(x'))}{\partial \phi^a(x)}\delta\phi^a(x) + \frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x'), \phi,_\mu(x'))}{\partial \phi^a,_\mu(x)}\delta\phi^a,_\mu(x)\right] = 0 \tag{6.2.2}$$

この第 2 項の $\delta\phi^a_{,\mu}$ は x^μ を固定した変分であるから

$$\delta\phi^a_{,\mu} = \delta\partial_\mu\phi^a(x) = \partial_\mu\delta\phi^a(x) \tag{6.2.3}$$

である．それゆえ，第 2 項を部分積分して，$x \to \infty$ で $\delta\phi^a(x) \to 0$，および $t = t_1, t_2$ で

$$\delta\phi^a(x, t_1) = \delta\phi^a(x, t_2) = 0 \tag{6.2.4}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\delta J(\phi) &= \int d^4x' \left\{\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x'), \phi,_\nu(x'))}{\partial \phi^a(x)} - \partial_\mu\left[\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x'), \phi,_\nu(x'))}{\partial \phi^a,_\mu}\right]\right\}\delta\phi^a(x)\delta^4(x - x') \\ &= \left\{\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x), \phi,_\nu(x))}{\partial \phi^a(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi(x), \phi,_\nu(x))}{\partial \phi^a,_\mu}\right)\right\}\delta\phi^a(x) = 0\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

となる*).

これにより，$\delta\phi^a(x)$ は x^μ, a について独立の変分であるから，

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi,\phi_{,\nu})}{\partial\phi^a_{,\mu}(x)}\right)-\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi,\phi_{,\nu})}{\partial\phi^a}=0 \tag{6.2.6}$$

をえる．これが，質点系の (1.3.15) に対応する場の理論のラグランジュウ方程式である．

さらに，1.4 節で導かれた基本変分式 (1.4.11)，(1.4.13) はそれぞれ

$$\begin{aligned}\Theta &= \int d^3x\left[\frac{\partial \boldsymbol{L}(\phi,\phi_{,\mu})}{\partial\dot{\phi}^a(x)}\delta\phi^a(x)-\boldsymbol{E}(\phi,\phi_{,\mu})\delta t\right]\\ {}_*\Theta &= \int d^3x\left[\pi_a(x)\delta\phi^a(x)-\boldsymbol{H}(\phi,\phi_{,i},\pi)\delta t\right]\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

となる．ここで，エネルギー密度 $\boldsymbol{E}$ とハミルトン関数密度 $\boldsymbol{H}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\phi,\phi_{,\mu}) &= \pi_a(x)\xi^a(x)-\boldsymbol{L}(\phi,\phi_{,\mu})\\ \boldsymbol{H}(\phi,\phi_{,i},\pi) &= \pi_a(x)\xi^a(\phi,\phi_{,i},\pi)-\boldsymbol{L}\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

である．$\boldsymbol{H}$ の右辺の ξ^a と $\boldsymbol{L}$ は，$\dot{\phi}^a=\xi^a$ を π_a で表したものである．

全ハミルトン関数は，$\boldsymbol{H}$ を全空間で積分した

$$H(\phi,\phi_{,i},\pi)=\int d^3x\boldsymbol{H}(\phi,\phi_{,i}\pi) \tag{6.2.9}$$

である．また，正準方程式は次のように表される．

$$\partial_0\phi^a(x)=\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\pi_a(x)},\quad \partial_0\pi_a(x)=-\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\phi^a(x)} \tag{6.2.10}$$

運動の生成演算子 (5.2.21) や (5.2.42) は

$$X_t=\frac{\partial}{\partial t}+\int d^3x\left(\xi^a(x)\frac{\partial}{\partial\phi^a(x)}+R^a(x)\frac{\partial}{\partial\xi^a(x)}\right), \tag{6.2.11}$$

$${}_*X_t=\frac{\partial}{\partial t}+\int d^3x\left(\frac{\partial H}{\partial\pi_a(x)}\frac{\partial}{\partial\phi^a(x)}-\frac{\partial H}{\partial\phi^a(x)}\frac{\partial}{\partial\pi_a(x)}\right) \tag{6.2.12}$$

である．R^a は (5.2.4) の R^i に対応するものである．

注*）$\delta^4(x)$ は 4 次元のデルタ関数で，$\delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ である．

5.2 節で定義した，dq^i と $\partial/\partial q^j$ などとの内積は，場の理論では，同時刻で定義される；

$$\left.\begin{aligned}\left\langle d\phi^a(x), \frac{\partial}{\partial\phi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x'^0} &= \delta^a_b\delta^3(x-x') \\ \left\langle d\xi^a(x), \frac{\partial}{\partial\xi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x'^0} &= \delta^a_b\delta^3(x-x')\end{aligned}\right\} \tag{6.2.13}$$

$$\left.\begin{aligned}\left\langle d\phi^a,_i(x), \frac{\partial}{\partial\phi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x'^0} &= \delta^a_b\partial_i\delta^3(x-x') \\ \left\langle d\xi^a,_i(x), \frac{\partial}{\partial\xi^b(x')}\right\rangle_{x^0=x'^0} &= \delta^a_b\partial_i\delta^3(x-x')\end{aligned}\right\} \tag{6.2.14}$$

これ以外すべてゼロである．ここに $\delta(x)$ はディラックの 3 次元 δ 関数，$\partial_i\delta(x)$ はその x^i 微分である．

ヘッシアン行列は汎関数微分によって定義され

$$\begin{aligned}A_{ab}(x,x') &\equiv \frac{\delta}{\delta\phi^a{}_{,0}(x)}\frac{\delta}{\delta\phi^b{}_{,0}(x')}\int d^3x'' L\left(\phi\left(x''\right), \phi_{,\mu}\left(x''\right)\right)|_{x^0=x'^0=x''^0} \\ &= A_{ab}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x))\delta^4(x-x')\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

である．

まだ説明すべきことはあるが，後の話に余り関係がないので省略する．

例題 6.1.　電磁場

電磁場の 4 元ベクトルポテンシャルを $A_\mu(\mu=0\sim3)$ とすると，ϕ_a の a に当るものは μ である．ラグランジュ関数は

$$L = \int d^3x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{6.2.16}$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{6.2.17}$$

で与えられる．作用積分は

$$J = \int \boldsymbol{L}(A, \partial_\mu A)dt = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{6.2.18}$$

この変分から，ラグランジュ方程式は (6.2.6) によって次のように導かれる．

$$\partial_\mu\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{\rho\sigma}(x)}{\partial A_{\lambda,\mu}(x)}F^{\rho\sigma}(x)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial A_\lambda(x)}F^{\rho\sigma}(x) = 0$$

第２項は０だから

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\partial_\mu\left(\delta^\mu_\rho\delta^\lambda_\sigma - \delta^\lambda_\rho\delta^\mu_\sigma\right)F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\partial_\mu\left(F^{\mu\lambda} - F^{\lambda\mu}\right) = \partial_\mu F^{\mu\lambda} = 0$$

よって，ラグランジュ方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\lambda} = \partial_\mu\left(\partial^\mu A^\lambda - \partial^\lambda A^\mu\right) = 0 \tag{6.2.19}$$

となる．

A_0, A_i に対応する正準運動量を求めよう．$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ゆえ $F_{\mu\mu} = 0$, よって $\partial_0 A_0 = \dot{A}_0$ は $\boldsymbol{L}$ の中にない．

$$\therefore \quad \pi^0(x) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \tag{6.2.20}$$

$$\pi^i(x) = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{A}_i(x)} = -\frac{1}{2}(\delta^0_\mu\delta^i_\nu - \delta^0_\nu\delta^i_\mu)F^{\mu\nu} = F^{i0} = \partial^i A^0(x) - \partial^0 A^i(x) \tag{6.2.21}$$

である．これよりハミルトン関数は，(6.2.21) を用いると

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\pi^i \dot{A}_i - \boldsymbol{L}\right] = \int d^3x \left[\pi^i\left(\partial_i A^0 - \pi_i\right) + \frac{1}{2}F_{i0}F^{i0} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right] \\ &= \int d^3x \left[-\pi^i\pi_i + \pi^i\partial_i A^0 + \frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right] \end{aligned}$$

第２項を部分積分によって書き変えると（$x \to \infty$ で $A^0, \pi^i \to 0$ ゆえ積分項はゼロ）

$$\boldsymbol{H} = \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi^i\pi_i - A^0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right] \tag{6.2.22}$$

となる．

第7章

拘束系の力学—位相空間—

拘束条件には，外的拘束条件と内的拘束条件とがあり，後者はヘシアン行列が非正則である特異（非正則）ラグランジュ関数から現われることを，第2，第3，第5章で述べた．本書ではもっぱら内的拘束条件のある力学系を扱う．

すでに見てきたように，内的拘束条件はホロノーム条件である．ホロノーム拘束条件はその中の束縛変数について解き，その束縛変数を他の変数によって表せば，束縛変数をその力学系の記述から消去できる．しかし，その消去法ではラグランジュ関数や運動方程式の形式が複雑になり，汚くなって見透しが悪い．そこで，束縛変数を残したまま，拘束条件を取り入れる方法の一つが，ラグランジュの未定係数法であった．

特異ラグランジュ関数の力学系に現われる拘束条件も，それを残したままで，なるべく正準形式を保つような体系的理論を目指したのが，P. G. バーグマン[(1)]とディラックである[(2)]．**このような方法は，その力学系の対称性を保ったままで，なるべく正準形式のアルゴリズムを適用できるようにするもので，量子化への移行においてはことさらに重要である．**

その方法は主にディラックによって開発されたので，ディラック理論の紹介から始める．そしてディラック理論をさらに発展させ，それによって残された問題を解決した筆者らの処法を中心に拘束系の力学理論の構造とその特徴を解説する．特に，ゲージ変換と拘束条件の関係やゲージ変換の生成子の作り方を紹介する．また，第1類拘束条件に関するディラックの予想は正しくないことを示す．

7.1 特異ラグランジュ関数の系とディラックの方法

ディラックの方法は位相空間で扱うのがまぎれなくてよい．そこで，まず位相空間での理論から始め，それの速度位相空間への移行を考察することにする．

N 個の力学変数によって記述される系を考える．一般座標を q^i，速度を $\dot{q}^i = \xi^i (i = 1 \sim N)$ とし，特異（非正則）ラグランジュ関数 L のヘシアン行列 A_{ij} の階数を $(N-R)$ とする；

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = A_{ji}, \quad \mathrm{rank}(A_{ij}) = N - R \tag{7.1.1}$$

この場合，2.2 節で述べたように，正準運動量 $p_i = \partial L / \partial \xi^i$ のうち R 個は独立でなく，$\xi^i = \dot{q}^i$ について解く際に，$(N-R)$ 個の ξ^i のみについて解けるが，R 個の ξ^α は未定のままであった．このとき，R 個の ξ^α を消去すると，R 個の p_i, q^i の間の関係式*）

$$_*\Phi_\alpha(q,p) = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{7.1.2}$$

をえる．これが位相空間における内的拘束条件である．この拘束条件はラグランジュ関数の $\dot{q}^i = \xi^i$ 依存性，つまり A_{ij} の非正則性のみに由来して生じたものであるから，これを **1 次拘束条件式**（primary constraint）と呼んでいる．

簡単な例は，第 2 章の例題 2.1，および例題 2.2 である．(2.1.11) のラグランジュ関数

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1)^2 + q^1 \xi^2 + (q^2)^2$$

のヘシアン行列の階数は 1 である．正準運動量は

$$p_1 = \xi^1, \quad p_2 = q^1 \tag{7.1.3}$$

であるが，第 2 式の p_2 は ξ を含まないので，

$$_*\Phi = p_2 - q^1 = 0 \tag{7.1.4}$$

注*）最初にことわったように，L, H は時間 t に陽に依存しないとする．したがって拘束条件も t によらない．左下の $*$ 印は位相空間の量を明示し，速度位相空間の量と区別する．

が 1 次拘束条件式である．また，例題 2.2 の L (2.2.9) の場合は，(2.2.11) から ξ を消去してえられた (2.2.12)

$$ {}_*\Phi = p_1 + p_2 + q^2 = 0 $$

が 1 次拘束条件式である．

では，R 個の拘束条件 (7.1.2) を有する力学系について，正準形式のディラック理論を説明しよう．まず，2.2 節の位相空間における変分原理にもどる．作用積分

$$ J[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ p_i, \dot{q}^i - H(q,p) \right\} dt \tag{7.1.5} $$

の定留条件として，(2.2.18)

$$ \delta J[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right\} dt = 0 \tag{7.1.6} $$

を得た．ここで問題にしている力学系には拘束条件が存在するために，上式の $\delta q^i, \delta p_i$ のうち R 個は独立ではなく，(7.1.2) の変分から導かれる次式

$$ \frac{\partial_* \Phi_\alpha}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial_* \Phi_\alpha}{\partial p_i} \delta p_i = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{7.1.7} $$

を満さなければならない．そこで，未定係数法を用いて拘束条件を取り入れる．

未定係数を v^α として，$v^\alpha dt$ を (7.1.7) に乗じ，α について和をとったものを (7.1.6) から引くと

$$ \delta J[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - v^\alpha \frac{\partial_* \Phi_\alpha}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} + v^\alpha \frac{\partial_* \Phi_\alpha}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right\} dt \tag{7.1.8} $$

となる．v^α を巧く選んで R 個の $\delta p_\alpha, \delta q^\alpha$ の係数因子がゼロになるようにすると，すべての $\delta p_i, \delta q^i$ の係数因子をゼロとおくことができるから，

$$ \left. \begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + v^\alpha \frac{\partial_* \Phi_\alpha}{\partial p_i} \\ \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} - v^\alpha \frac{\partial_* \Phi_\alpha}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} \tag{7.1.9} $$

を得る．

4.2 節にならって，この式をポアソン括弧を用いて書くと

$$ \left. \begin{aligned} \dot{q}^i &= \left\{ q^i, H + v^\alpha {}_*\Phi_\alpha \right\} \quad (\mathrm{mod}_* \Phi_\alpha) \\ \dot{p}_i &= \left\{ p_i, H + v^\alpha {}_*\Phi_\alpha \right\} \quad (\mathrm{mod}_* \Phi_\alpha) \end{aligned} \right\} \tag{7.1.10} $$

となる．上式で，ポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ は，通常の (4.2.3) のようにすべての q^i, p_i を独立変数とした式である．それゆえ，(4.2.6) が成り立つ；

$$\left\{q^i, p_j\right\} = \delta^i_j, \quad \left\{q^i, q^j\right\} = \{p_i, p_j\} = 0 \tag{7.1.11}$$

ただし，(7.1.9) や (7.1.10) では，ポアソン括弧式を計算した後の右辺では拘束条件を課して $\Phi_\alpha = 0$ とするのである．

したがって，一般に力学量 $f(q,p,t)$ に対して

$$\frac{df}{dt} = \{f, H + v^\alpha{}_*\Phi_\alpha\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \mathrm{mod}(\Phi_\alpha) \tag{7.1.12}$$

となる．ここで，$\mathrm{mod}({}_*\Phi_\alpha)$ は ${}_*\Phi_\alpha = 0$ の下で等式が成り立つという意味である．つまり，**ポアソン括弧式などの計算処理をすべてすました後，最後に拘束条件 (7.1.2) を要請するのである．それまでは Φ_α はそのまま残しておいて，最後にゼロとおく等式を弱等式**（weak equality）と呼んで

$${}_*\Phi_\alpha \approx 0 \tag{7.1.13}$$

と表すことにする．

ここで注目すべきことは，時間発展を与える生成子は H ではなく，$v^\alpha{}_*\Phi_\alpha$ を加えたものだということである．そこで

$$H_T \equiv H + v^\alpha{}_*\Phi_\alpha \tag{7.1.14}$$

とおき，正準ハミルトン関数 H に対して，H_T を全ハミルトン関数（total Hamiltonian）と呼ぶ．この H_T が時間の推進演算子というわけである．(7.1.10), (7.1.12) は

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}^i &= \left\{q^i, H_T\right\} \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi_\alpha), \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H_T\} \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi_\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{7.1.15}$$

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \{f, H_T\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi_\alpha) \tag{7.1.16}$$

と書き直すことができる．

次に問題になることは，拘束条件 (7.1.13) と運動方程式の整合性である．力学量 f は (7.1.16) によって時間的に変化してゆくから，${}_*\Phi_\alpha$ の時間発展も

$${}_*\dot{\Phi}_\alpha = \frac{d{}_*\Phi_\alpha}{dt} = \left\{{}_*\Phi_\alpha, H_T\right\} = \left\{{}_*\Phi_\alpha, H\right\} + \left\{{}_*\Phi_\alpha, v^\beta{}_*\Phi_\beta\right\} \tag{7.1.17}$$

となる．ところが，拘束条件は時間が経過してもやはり同じ条件式を満さねばならない．もしそうでなければ，運動方程式と矛盾する．それゆえ，Φ_α は定常条件

$$ {}_*\dot{\Phi}_\alpha = \{{}_*\Phi_\alpha, H_T\} \approx 0 \tag{7.1.18} $$

を満たさなければならない．上式の右辺は (7.1.13) のもとで成立すればよいので，弱等式となる．**Φ_α への定常性の要請は運動方程式が解を有するための必要条件であり，これを整合性の条件と呼んでいる．**(7.1.18) は弱等式ゆえ，

$$ {}_*\dot{\Phi}_\alpha \approx \{{}_*\Phi_\alpha, H\} + v^\beta \{{}_*\Phi_\alpha, {}_*\Phi_\beta\} \approx 0 \tag{7.1.19} $$

としてよい（$\{v^\beta, {}_*\Phi_\alpha\}{}_*\Phi_\beta$ の項は ≈ 0 であるから落してよい）．

上式の定常性の条件が，$\mathrm{mod}(\Phi_\alpha)$ のもとで無条件に成立すれば問題ないが，一般には成り立たない．そのときは，次の２通りの場合が生ずる．(7.1.19) が

(i) v^β を定める式になる場合；($\{{}_*\Phi_\alpha, {}_*\Phi_\beta\} \not\approx 0$ のとき)

(ii) v^β を含まず新しい拘束条件式を与える場合（$\{{}_*\Phi_\alpha, {}_*\Phi_\beta\} \approx 0$ のとき)；すなわち

$$ \{{}_*\Phi_\alpha, H\} \equiv {}_*\chi_\sigma(q,p) \approx 0, \quad (\sigma = 1 \sim \Sigma) \tag{7.1.20} $$

が新たに要請される場合である．

このように，**1 次拘束条件から派生する条件式を 2 次拘束条件** (secondary constraint) という．

さらに，この 2 次拘束条件式が運動方程式と整合的であるためには，さらに次の定常性が必要である；

$$ {}_*\dot{\chi}_\sigma \approx \{{}_*\chi_\sigma, H\} + v^\beta \{{}_*\chi_\sigma, {}_*\Phi_\beta\} \approx 0 \tag{7.1.21} $$

この式の結果もまた，２通りに分れる．v^β の中のあるものが定まるか，新しい条件式が生ずるかである．この操作を繰り返して，もはや新しい条件式が出ないようになれば，整合性の条件が満されたことになる．これ以上拘束条件が現われなくなるまで拘束条件を追加して運動方程式との整合性を満すことは，5.2 節で運動方程式の積分可能条件として，生成系が閉じるまで（$X_i, Z_\beta, Y_\sigma \cdots$）と追加していくことに対応しているのである．

このようにして生じたすべての２次的拘束条件をまとめて

$$ {}_{*}\chi_k(q,p) \approx 0 \quad (k = 1 \sim K) \tag{7.1.22}$$

と記すことにする（$K \geq \Sigma$）.

さて，v^β を定める (i) の場合を考察するには，ディラックに従って，拘束条件を次のように分類するとよい．いま，ある拘束条件式 $\psi \approx 0$ が，すべての１次，２次拘束条件に対して

$$\{\psi, {}_{*}\Phi_\alpha\} \approx 0, \quad \{\psi, {}_{*}\chi_k\} \approx 0 \tag{7.1.23}$$

を満すとき，**$\psi \approx 0$ を第１類拘束条件式（first class constraint）**と呼ぶ．上式のどれか一つでも満されないものがあれば，**その ψ を第二類拘束条件式（second class constraint）**と呼ぶ．第１類と第２類の区別は物理的に重要である．

ところが，第１類および第２類拘束条件式の数は，条件式のとり方によって変るのである．拘束条件の独立な１次結合の集合は，元の拘束条件の集合と等値であるから，巧く組合せて

$$ {}_{*}\Phi'_\alpha = a^\beta_{\alpha *}\Phi_\beta + b^k_{\alpha *}\chi_k\,;\ {}_{*}\chi'_k = a^\alpha_{k*}\Phi_\alpha + b^l_{k*}\chi_l \tag{7.1.24}$$

のような１次結合をつくると（$a^\beta_\alpha, b^k_\alpha$ などは q, p の関数でよい），第１類拘束条件の数がふえることがある．そこで，できるだけ多くの拘束条件が第１類となるような一次結合をつくり，それらを改めて拘束条件とするのである．

たとえば，$p_1 \approx 0, p_2 + q^1 \approx 0, q^1 \approx 0$ の３拘束条件があるとき，このままではすべて第２類であるが，第２と第３式から $p_2 \approx 0, q^1 \approx 0$ を導くことができる．すると，$p_2 \approx 0$ は第１類，$p_1 \approx 0, q^1 \approx 0$ は第２類となる．

第１類拘束条件には次の性質がある．ψ_α, ψ_β を第１類とすると，$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}$ もまた第１類である．なぜならば，第１類の定義により $\{\psi_\alpha, \psi_\beta\} \approx 0$ だから，$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}$ は拘束条件の１次結合で表される．それゆえ ψ_γ を第１類とすると，

$$\left\{\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}, \psi_\gamma\right\} \approx 0 \tag{7.1.25}$$

また，θ_γ を第２類とすると，ヤコビの恒等式 (4.2.11) により

$$\{\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}, \theta_\gamma\} = -\{\{\psi_\beta, \theta_\gamma\}, \psi_\alpha\} - \{\{\theta_\gamma, \psi_\alpha\}, \psi_\beta\} \tag{7.1.26}$$

となる．ところが，$\{\psi_\beta, \theta_\gamma\} \approx 0, \{\theta_\gamma, \psi_\alpha\} \approx 0$ であるから，拘束条件の 1 次結合で表されるゆえ，右辺の 2 項はそれぞれ ≈ 0 である．よって，$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}$ はすべての拘束条件とのポアソン括弧が弱等式でゼロとなるから，第 1 類である．

もう一つ留意すべきことは，第 2 類拘束 χ_k の 2 乗 $(\chi_k)^2$ は第 1 類となることである．なぜなら，$(\chi_k)^2$ とのポアソン括弧は χ_k の 1 次結合となるから ≈ 0 である．

これで，拘束条件には，1 次と 2 次拘束があり，さらに，それぞれに第 1 類と第 2 類拘束に分類されることがわかった．H_T に現われるものは 1 次拘束 ${}_*\Phi_\alpha$ のみである．そこで，第 1 類が最も多くなるように拘束条件を選ぶことにする．

第 1 類拘束条件の 1 次と 2 次拘束をそれぞれ ${}_*\overset{(1)}{\Phi}_\alpha, {}_*\overset{(1)}{\chi}_k$；両方を一括して，$\psi_a (a = 1 \sim A)$,

第 2 類拘束条件の 1 次と 2 次拘束をそれぞれ ${}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}, {}_*\overset{(2)}{\chi}_{k'}$；両方を一括して，$\theta_s (s = 1 \sim S)$ と表すことにする*)．

すると全ハミルトン関数は

$$H_T = H + \overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\,{}_*\overset{(1)}{\Phi}_\alpha + \overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\,{}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'} \tag{7.1.27}$$

と記される．そして，拘束条件に対する整合性の条件 (7.1.19)，(7.1.21) などは，まとめて次のように記すことができる．

$$\dot{\psi}_\alpha = \{\psi_\alpha, H_T\} \approx \{\psi_\alpha, H\} \approx 0, \tag{7.1.28}$$

$$\dot{\theta}_s = \{\theta_s, H_T\} \approx \{\theta_s, H\} + \overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\,\{\theta_s, {}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}\} \approx 0 \tag{7.1.29}$$

上式で，α は $1 \sim R' \leq R$，α' は $1 \sim S' \leq S$，そして $R' + S' = R$ である．

第 1 類拘束条件の定常性 (7.1.28) には未定関数 $\overset{(1)}{v}$，$\overset{(2)}{v}$ の項は残らないから，v を定める式ではなく，新たな拘束条件を与えるものである．つまりこの右辺が弱等式としてゼロにならない場合，新拘束条件がでる．それに対して第 2 類拘束条件の定常性 (7.1.29) は $\overset{(2)}{v}$ を定める式であるから新拘束条件は現れない．

そこで，(7.1.29) を $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}$ について解こう．この方程式の解は，その特解に次の同次

注*）1 次拘束は ${}_*\overset{(1)}{\Phi}_\alpha$ と ${}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}$ を合せて R 個である．前と同じ添字 α を用いたが混乱はないのであろう．2 次拘束の ${}_*\chi_k$ の k と k' についても同様．

方程式の解を加えたものである．まず，$\overset{(2)}{v}$ の同次式

$$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\{\theta_s, {}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}\} = 0, \quad (\alpha' = 1 \sim S', s = 1 \sim S) \tag{7.1.30}$$

の解として，すべての $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}$ がゼロでないものがあったとしよう．すると，θ_s とのポアソン括弧が ≈ 0 となる $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\Phi_{\alpha'}$ が存在することになる．これと第 1 類 ψ_a とのポアソン括弧は当然 ≈ 0 であるから，$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\Phi_{\alpha'}$ は第 1 類となる．しかるに，すでに第 1 類拘束が最も多くなるような拘束条件の線形結合を選んだのであるから，第 2 類拘束 $\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}$ の線形結合 $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}\Phi_{\alpha'}$ が第 1 類となるのは矛盾である．したがって，上の同次式において，すべての $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}$ はゼロでなければならない．そこで (7.1.29) の特解を求めればよい．

そのために，行列

$$C_{st} \equiv \{\theta_s, \theta_t\} = -C_{ts} \tag{7.1.31}$$

を考える．$\det(C_{st}) \neq 0$ が次のように証明される．もし，$\det(C_{st}) = 0$ なら

$$u^s C_{st} = u^s \{\theta_s, \theta_t\} = 0$$

を満すゼロでない u^s の組が存在する．(u^s は行列 C_{st} の固有値ゼロのベクトルである．）すると，上記の場合と同じ理由で，$u^s\theta_s$ が第 1 類拘束となり矛盾するので，

$$\det(C_{st}) = \det(\{\theta_s, \theta_t\}) \neq 0 \tag{7.1.32}$$

である．奇数次元の反対称行列式はゼロであるから，第 2 類拘束条件 θ_s の数 S は偶数でなければならない．

C_{st} は正則行列ゆえ，その逆行列 C^{-1} が存在する；

$$(C^{-1})^{st} C_{tu} = \delta^s_u \tag{7.1.33}$$

(7.1.29) に $(C^{-1})^{rs}$ を乗じ，s について 1 から S までの和をとると，$\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}$ は θ_s の一部ゆえ，$\{\theta_s, \overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'}\} = C_{s\alpha'}$ であるから，右辺第 2 項は $(C^{-1})^{rs}C_{s\alpha'} = \delta^r_{\alpha'}$ となり $r = \alpha'$ のとき

$$\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'} = -(C^{-1})^{\alpha' s}\{\theta_s, H\} \tag{7.1.34}$$

をえる．また $r=k'\neq\alpha'$ のとき，(7.1.29) の右辺第 2 項は消えるから

$$\left(C^{-1}\right)^{k's}\{\theta_s, H\}\approx 0 \tag{7.1.35}$$

となる．ここで k' は θ_s の中の ${}_*\overset{(2)}{\chi}_{k'}$（第 2 類 2 次拘束）の添字に当るものである．こうして H_T の中の $v^{\alpha'}$ が定まった．(7.1.35) は拘束条件である．

この (7.1.34) を (7.1.27) の H_T に代入して

$$\begin{aligned} H_T =& H+\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\,{}_*\overset{(1)}{\Phi}_{\alpha}+\{\theta_s, H\}\left(C^{-1}\right)^{s\alpha'}\,{}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'} \\ \equiv& H^*+\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\,{}_*\overset{(1)}{\Phi}_{\alpha} \end{aligned} \tag{7.1.36}$$

をえる．ここに

$$H^*=H-\{H,\theta_s\}\left(C^{-1}\right)^{s\alpha'}\,{}_*\overset{(2)}{\Phi}_{\alpha'} \tag{7.1.37}$$

である．そして H^* の重要な性質は，すべての θ_t に対して

$$\{\theta_t, H^*\}\approx 0 \tag{7.1.38}$$

となることである．なぜならば，(7.1.28) と (7.1.29) より H_T はすべての拘束条件とのポアソン括弧は ≈ 0 であり，H_T の第 2 項 $\overset{(1)}{v}\overset{(1)}{\Phi}_{\alpha}$ は第 1 類であるから同様に ≈ 0，よって H^* とのポアソン括弧も ≈ 0 となるからである．(7.1.37) を用いて直接 $\{H^*, \theta_{s'}\}$ を計算して確かめることもできる．

こうして，H_T の中の第 2 類拘束は H^* の中に繰り入れられ，第 1 類拘束のみが任意関数 $\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}$ を係数因子として H_T に現われることになる．

以上が，拘束条件の整合性に関するディラックのアルゴリズムである．それをまとめると，

(1) 第 1 類拘束の数が最も多くなるような拘束条件の線形結合をとると，第 2 類拘束の数は偶数になる．

(2) 全ハミルトン関数 H_T の中の未定係数のうち，第 1 類拘束の係数因子 $\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}$ は任意関数として残り，第 2 類拘束の係数因子 $\overset{(2)}{v}{}^{\alpha'}$ は定まり (7.1.34) で与えられる．

(3) H_T の中の第 2 類拘束は H^* の中に繰り入れられ，H^* はすべての拘束条件とのポアソン括弧は ≈ 0，つまり第 1 類である．

例題 7.1. 次のラグランジュ関数で記述される力学系をとる.

$$L = q^1\dot{q}^2 - q^2\dot{q}^1 + (q^1)^2 + (q^2)^2 \tag{7.1.39}$$

この系は 1 階微分方程式に従うスピン 1/2 のディラック粒子の場合に対応している. このような系は, 不用意に正準形式を用いると矛盾が生ずることを示そう.

ラグランジュ方程式は

$$\dot{q}^2 + q^1 = 0, \quad \dot{q}^1 - q^2 = 0 \tag{7.1.40}$$

拘束条件は

$$\Phi_1 = p_1 + q^2 \approx 0, \quad \Phi_2 = p_2 - q^1 \approx 0 \tag{7.1.41}$$

である.

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \left\{p_1 + q^2, p^2 - q^1\right\} = 2 \tag{7.1.42}$$

であるから, 2 つの拘束条件は第 2 類である. 正準ハミルトン関数は次式で与えられる ;

$$\begin{aligned} H &= p_1\dot{q}^1 + p_2\dot{q}^2 - q^1\dot{q}^2 + q^2\dot{q}^1 - (q^1)^2 - (q^2)^2 \\ &= (p_1 + q^2)\dot{q}^1 + (p_2 - q^1)\dot{q}^2 - (q^1)^2 - (q^2)^2 \\ &\approx -(q^1)^2 - (q^2)^2 \end{aligned} \tag{7.1.43}$$

最後の式では拘束条件 (7.1.41) を用いた.

全ハミルトン関数 $H_T = H + v^1\Phi_1 + v^2\Phi_2$ を求めるために (7.1.34) を用いる.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \{\Phi_1, H\} = 2q^1, \quad \{\Phi_2, H\} = 2q^2 \tag{7.1.44}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2q^1 \\ 2q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 \\ -q^1 \end{pmatrix} \tag{7.1.45}$$

よって

$$H_T = H^* = q^2(p_1 + q^2) - q^1(p_2 - q^1) - (q^1)^2 - (q^2)^2 = q^2 p_1 - q^1 p_2 \tag{7.1.46}$$

となる. この H^* から正準形式によって運動方程式 (7.1.40) が正しく導かれる.

注意すべきことは，H_T ではなく (7.1.43) の H を用い，しかも拘束条件 Φ_1 を使ってポアソン括弧として

$$\{q^1, q^2\} \approx \{q^1, -p_1\} = -1 \tag{7.1.47}$$

をとると

$$\dot{q}^1 = \{q^1, H\} = 2q^2 \tag{7.1.48}$$

となるから，運動方程式 (7.1.40) と矛盾する．このように，拘束条件によって，(7.1.47) を採用するのが誤りであることがわかる[(3)]．これらに関する事情は次節で明らかになる．

7.2　ディラック括弧による定式化

前節で示したように (7.1.37) で定義した H^* は，すべての第 2 類拘束条件 θ_s とのポアソン括弧は弱等式でゼロである．この性質を一般化して，任意の力学量 $f(q,p)$ に対しても，すべての θ_s とポアソン括弧が ≈ 0 となるような f^* を f からつくろう．

$$f^* = f + a^s\theta_s, \quad (s = 1 \sim S) \tag{7.2.1}$$

とおき，

$$\{f^*, \theta_s\} \approx \{f, \theta_s\} + a^t\{\theta_t, \theta_s\} \approx 0 \tag{7.2.2}$$

から a^t を決めよう．行列 $C_{st} = \{\theta_s, \theta_t\}$ は正則であるから C^{-1} を上式に乗じて

$$a^t = -\{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st} \tag{7.2.3}$$

をえる．よって求める f^* は

$$f^* = f - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\theta_t \tag{7.2.4}$$

である．この表式から明らかなように，(7.1.37) の H^* はこの f^* に類似のものである．

他の力学量 g についても同様に g^* をつくると

$$\{f^*, \theta_s\} \approx 0, \quad \{g^*, \theta_s\} \approx 0 \tag{7.2.5}$$

であるから，

$$\{f^*, g^*\} \approx \{f, g^*\} - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t, g^*\} \approx \{f, g^*\}$$
$$\approx \{f, g\} - \{g, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\{f, \theta_t\} = \{f, g\} - \{f, \theta_t\}(C^{-1})^{ts}\{\theta_s, g\} \tag{7.2.6}$$

となる．上式で，C^{-1} の反対称性と $\{g, \theta_s\} = -\{\theta_s, g\}$ を用いた．

ここで，(7.2.6) を考慮して，新たに次のような括弧式を導入しよう；

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \{f, \theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t, g\} \tag{7.2.7}$$

これはディラック括弧式と呼ばれるものである．ディラック括弧は (7.2.6) の右辺そのものであるから，次式を満す

$$\{f, g\}^* \approx \{f^*, g^*\} \approx \{f^*, g\} \approx \{f, g^*\} \tag{7.2.8}$$

ディラック括弧の意義は，拘束条件のある場合でも，すべての q^i, p_i を独立変数のように扱ってポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ を定め，それを用いて (7.2.7) によって力学量に対する括弧式のアルゴリズムを定義するところにある．そして，最後に拘束条件を取り入れるのである．初めから拘束条件を用いて従属変数を消去した系では，運動方程式やアルゴリズムが複雑で形式は汚くなる．それを避ける方法がディラック形式である．

任意の力学量 f と θ_s とのディラック括弧をとると

$$\{f, \theta_s\}^* = \{f, \theta_s\} - \{f, \theta_r\}(C^{-1})^{rt}\{\theta_t, \theta_s\} = \{f, \theta_s\} - \{f, \theta_s\} = 0 \tag{7.2.9}$$

となる．このことは，**ディラック括弧をアルゴリズムの基本にとるならば，すべての第２類拘束 $\boldsymbol{\theta_s}$ を強い意味でゼロとおくことができるから，$\boldsymbol{\theta_s}$ を理論の記述から除きうる**ことを示している．ということは，第２類拘束条件は自然に扱われて，しかも理論形式から除去される可能性を示唆している．この点については後で改めて考察する．

このディラック括弧が，ポアソン括弧と同じ役割を力学系で演じうるためには，ポアソン括弧と同様の性質を満さなければならない．ポアソン括弧に関する重要な性質は 4.2 節で示したリー環の (i)∼(v) の５項目である．ディラック括弧も，これら５つの性質を満すことを示そう．まず (4.2.9) の反対称性に対応する

$$\{f, g\}^* = -\{g, f\}^* \tag{7.2.10}$$

は，ポアソン括弧と行列 C^{-1} の反対称性から明らかである．(ii) の分配則は定義から明らかに成り立つ．(iv) の (4.2.12) 式に対応するものは，(7.2.8) により

$$
\begin{aligned}
\{f,gh\}^* &\approx \{f^*,gh\} \approx g\{f^*,h\} + \{f^*,g\}h \\
&\approx g\{f,h\}^* + \{f,g\}^* h
\end{aligned}
\tag{7.2.11}
$$

となる．(iii) のヤコビの恒等式 (4.2.11) については，まず

$$
\left\{f,\{g,h\}^*\right\}^* \approx \left\{f^*,\{g,h\}^*\right\} \approx \{f^*,\{g^*,h^*\}\}
\tag{7.2.12}
$$

であるから，ディラック括弧は f^*, g^*, h^* に対する通常のポアソン括弧と見なせるので，(4.2.11) が適用できる．よって恒等式

$$
\left\{f,\{g,h\}^{*,}\right\}^* + \left\{g,\{h,f\}^*\right\}^* + \left\{h,\{f,g\}^*\right\}^* = 0
\tag{7.2.13}
$$

が成り立つ．最後の (v) は，F が f_k の関数のとき

$$
\{F,g\}^* \approx \{F,g^*\} = \frac{\partial F}{\partial f_k}\{f_k,g^*\} = \frac{\partial F}{\partial f_k}\{f_k,g\}^*
\tag{7.2.14}
$$

となる．

したがって，**ディラック括弧は，これまでのポアソン括弧と同じ代数的性質を満すことがわかった．ディラック括弧は，もとの位相空間でポアソン括弧と同じ代数的性質を有するので，座標変換や正準変換に対する不変性を保っている．**これは大変便利で重要な特性である．

ディラック括弧を用いて，力学量 $f(q,p,t)$ の運動方程式を求めよう．まず運動方程式 (7.1.16) を，H^* とすべての θ_s とのポアソン括弧は ≈ 0 であるという (7.1.38) を用いて書き変えよう．$H_T = H^* + \overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\overset{(1)}{\Phi}_{\alpha}$ であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &\approx \frac{\partial f}{\partial t} + \{f^*,H_T\} + \{f,\theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t,H_T\} \\
&\approx \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,H_T\}^* + \{f,\theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t,\overset{(1)}{v}{}^{\alpha}\overset{(1)}{\Phi}_{\alpha}\}
\end{aligned}
$$

となる．上の変形で (7.2.8) と (7.2.4) を用いた．この式の最後の項は，$\overset{(1)}{\Phi}_{\alpha}$ が第 1 類であるから，当然 ≈ 0 である．よって，f の運動方程式は

$$
\frac{df}{dt} \approx \{f,H_T\}^* + \frac{\partial f}{\partial t}
\tag{7.2.15}
$$

となる.

すでに指摘したように，ディラック括弧を用いると，第２類拘束 θ_s はすべての力学量との括弧式がゼロになるから，θ_s は実質的にはゼロであって力学系から除去されたことになる．つまり，形式的にはすべての力学変数 q^i, p_i を独立であるかのように扱っているが，理論形式は実質的に拘束条件を取り込んだものになっているわけである．したがって，位相空間の次元は $2N$ ではなく，第２類拘束の数だけ減少していることになる．ここで強調すべきことは，**拘束系の量子化はディラック括弧に基づいて力学変数の交換関係を設定すべきだ**ということである．(例題 7.2 参照)

そこで，ディラック括弧を用いた場合，拘束条件による位相空間の縮減について考察しておこう.

7.3　拘束条件と位相空間の縮減

拘束条件を含む位相空間に対して，次の重要な定理が成り立つ.

定理：$2N$ 次元位相空間において

$$\begin{array}{ll} A \text{ 個の第 1 類拘束条件} & \psi_a \approx 0 \quad (a = 1 \sim A) \\ 2T \text{ 個の第 2 類拘束条件} & \theta_s \approx 0 \quad (s = 1 \sim S = 2T) \end{array} \tag{7.3.1}$$

が存在するとする.

変数変換 $(q^i, p_i) \to (Q^i, P_i)$ によって，これら拘束条件の組は，次のような正準座標 P_a および Q^t, P_t となるようにできる*)(4)(5)；

$$\begin{array}{lllll} \psi_a \approx 0 & \Longleftrightarrow & P_a \approx 0, & (a = 1 \sim A), & \\ \theta_s \approx 0 & \Longleftrightarrow & Q^t \approx 0, & P_t \approx 0, & (t = 1 \sim T = S/2) \end{array} \tag{7.3.2}$$

これ以外の $Q^{T+1}, \ldots, Q^N, P_{T+A+1}, \ldots, P_N$ は非拘束変数である．／

この定理の証明は長くなるので省略するが，関数群の理論 (5) を用いて証明される**).

新拘束条件の組 P_a, Q^t, P_t から明らかなように，P_a は第１類，Q^t, P_t は第２類である.

注*）この定理は厳密には局所的に（連結した一つの領域）成り立つ.
注**）詳しい説明と証明は，文献 (4)，(6) を参照されたい.

この定理を用いてディラック括弧の意味が理解できる．ディラック括弧には第 1 類は関係ないので，簡単化のためいま第 2 類拘束のみ存在するとする．式をまとめて書くために，次のような記号を導入する；

$Q^t \approx P_t \approx 0$ をまとめて$\Theta_s \approx 0, \quad (s = 1 \sim 2T = S)$
残りの非拘束座標 $Q^l, P_l(2N-S)$ 個を $X_m \quad (m = S+1 \sim 2N)$

と表す．

Θ_s 同士と X_m 同士の間のポアソン括弧は (4.2.6) と同じ $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 形の行列である．

$$
\begin{aligned}
&\{\Theta_s, \Theta_t\} = J_{st} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{X_m, X_n\} = J_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\{\Theta_s, X_m\} = J_{sm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.3.3}
$$

J_{st} が (7.1.31) の C_{st} である．

拘束条件 Θ_s は正準変数 Q^t, P_t であるから，ディラック括弧は

$$
\begin{aligned}
&\{\Theta_s, \Theta_t\}^* = J_{st} - J_{sr}(J^{-1})^{ru} J_{ut} = J_{st} - J_{st} = 0, \quad (r, s, t, u = 1 \sim S) \\
&\{\Theta_s, X_m\}^* = J_{sm} - J_{sr}(J^{-1})^{rt} J_{tm} = 0, \quad (m, n = S+1 \sim 2N) \\
&\{X_m, X_n\}^* = J_{mn} - J_{ms}(J^{-1})^{st} J_{tn} = J_{mn}
\end{aligned}
\tag{7.3.4}
$$

これから明らかなように，Θ_s のディラック括弧はすべてゼロである．それはディラック括弧の最初の定義から当然である．それ以外の X_m についてはポアソン括弧と一致する．

任意の力学量 $f(Q,P), g(Q,P)$ に対しては (7.2.14) によって

$$
\begin{aligned}
\{f, g\}^* =& \frac{\partial f}{\partial \Theta_s} \{\Theta_s, \Theta_t\}^* \frac{\partial g}{\partial \Theta_t} + \frac{\partial f}{\partial \Theta_s} \{\Theta_s, X_m\}^* \frac{\partial g}{\partial X_m} \\
&+ \frac{\partial f}{\partial X_m} \{X_m, \Theta_s\}^* \frac{\partial g}{\partial \Theta_s} + \frac{\partial f}{\partial X_m} \{X_m, X_n\}^* \frac{\partial g}{\partial X_n}
\end{aligned}
\tag{7.3.5}
$$

となるから，(7.3.4) の結果を用いると最後の項のみ残る．よって

$$
\{f, g\}^* = \frac{\partial f}{\partial X_m} J_{mn} \frac{\partial g}{\partial X_n} = \frac{\partial f}{\partial Q^l} \frac{\partial g}{\partial P_l} - \frac{\partial f}{\partial P_l} \frac{\partial g}{\partial Q^l}, \quad (l = S+1 \sim N) \tag{7.3.6}
$$

このようにディラック括弧は Θ_s（すなわち Q^t, P_t）を強い意味でゼロとおき，他に何ら影響せずに，理論記述から除去しうることを示している．その結果，$2N$ 次元位

相空間 $\boldsymbol{P}$ が，強等式 $Q^t = P_t = 0$ によって縮減され，Q^l, P_l のみの $2(N-S)$ 次元位相空間 $\boldsymbol{P}^*$ 上のポアソン括弧によって拘束系の力学を扱うことに対応している．したがって，ディラック括弧は，ヤコビの恒等式などポアソン括弧で成り立つ５つの代数関係を満すのは当然である．

以上のことから，逆に $\boldsymbol{P}^*$ 上のポアソン括弧を $\boldsymbol{P}$ 上で見るとディラック括弧になっていることが示される（証明は省略）．

ここで留意すべきことは，自由度の減少は位相空間では Q^t と P_t をともに対で除去しなければならないことである．その点で，第２類拘束条件の数が偶数であることがその要請を満している．

第１類 P_a の役割はゲージ変換と関係しているが，それについては次章に記す．

例題 7.2.

ディラック括弧を用いれば正しい結果をえることを示すために，例題 7.1 の力学系を再び取りあげる．この例では，第２類拘束条件を不用意に用いると矛盾がでた．それを回避するにはディラック括弧を用いればよいのである．

第２類拘束は２つであった．

$$\theta_1 = p_1 + q^2 \approx 0, \;\; \theta_2 = p_2 - q^1 \approx 0 \tag{7.3.7}$$

そして

$$C_{st} = \{\theta_s, \theta_t\} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^{-1})^{st} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

である．ディラック括弧は

$$\left\{q^1, q^2\right\}^* = 0 - \left\{q^1, \theta_s\right\} (C^{-1})^{st} \left\{\theta_t, q^2\right\} = -(C^{-1})^{12}(-1) = -\frac{1}{2} \tag{7.3.8}$$

以下同様に

$$\begin{gathered} \{p_1, p_2\}^* = -\frac{1}{2}, \quad \left\{q^i, p_j\right\}^* = \frac{1}{2}\delta^i_j \\ \left\{q^i, q^i\right\}^* = \{p_i, p_i\}^* = 0, \quad (i = 1, 2) \end{gathered} \tag{7.3.9}$$

このディラック括弧を用いる限り，$\theta_1 = \theta_2 = 0$ を強等式として使ってよいから，H_T の代りに (7.1.43) の $H \approx -(q^1)^2 - (q^2)^2$ を用いてよい．実際に

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \left\{q^1, H\right\}^* = q^2 \\ \dot{q}^2 &= \left\{q^2, H\right\}^* = -q^1 \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

をえる．これはラグランジュ方程式 (7.1.40) と一致して矛盾はない．

このことからも，正しい量子化はディラック括弧を基にすべきことがわかる．

例題 7.3.

さきの定理の特別な場合として，第 1 類拘束のみ存在して，第 2 類拘束がない例を考えよう．この場合はこの定理の証明は容易にできる．第 1 類拘束

$$\psi_a = 0, \quad (a = 1 \sim A) \tag{7.3.11}$$

は独立とする．仮定により

$$\{\psi_a, \psi_b\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\psi) \tag{7.3.12}$$

である．(7.3.11) は，一般性を失うことなく，p_a について解けるとしてよい．すると，その解は

$$\Phi_a = p_a - f_a(q^i, p_s) \approx 0, \quad (i = 1 \sim N,\ s = A+1 \sim N) \tag{7.3.13}$$

と表される．

拘束条件 (7.3.11) と (7.3.13) とは同値であるから，Φ_a も第 1 類拘束であり，

$$\Phi_a = C_a^b \psi_b \tag{7.3.14}$$

と書ける．ここで C_a^b は q^i, p_i の関数である．そこで，(7.3.11) あるいは (7.3.13) によって定まる空間（多様体）を M^* とする．(7.3.13) から，

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} = \frac{\partial f}{\partial q^a} - \frac{\partial f}{\partial q^b} + \{f_a, f_b\} \tag{7.3.15}$$

をえる．ところが，この式の右辺は p_a を含まないので (q^i, p_s) のみで表されている．一方，Φ_a は (7.3.12) と同様に

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\Phi) \Longrightarrow \{\Phi_a, \Phi_b\}\,|_{M*} = 0 \tag{7.3.16}$$

つまり，M^* 上でゼロである．M^* 上では (7.3.13) により p_a は (q^i, p_s) で表されるから，M^* の座標変数を (q^i, p_s) にとることができる．ところが (7.3.16) は (7.3.15) で示されたように，p_a によらない式である．それが M^* 上でゼロであるということ

は，もとの $\boldsymbol{P}$ 上でゼロであったということである．すなわち，Φ_a はポアソン括弧が強等式でゼロ；

$$\{\Phi_a, \Phi_b\} = 0 \tag{7.3.17}$$

である．すると

$$\Phi_a = P_a \tag{7.3.18}$$

なる正準変換（ポアソン括弧を不変に保つ）が存在し

$$\psi_a = 0 \Longleftrightarrow P_a = 0$$

が結論される．

7.4 拘束系の量子化

拘束条件のある系を量子化するには，これまでの考察からわかるように，縮減された位相空間での正準変数によらねばならない．それには，ディラック括弧を用いるのがよい．

古典論から量子論へ移行するには，よく知られているように，q^i, p_i を線形演算子とし，それらが作用する波動関数 Ψ を導入し，シュレーディンガー方程式として

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{7.4.1}$$

とおき，さらに第1類拘束条件を次のように Ψ に対する制限として要請する；

$$\Phi^k_\alpha \Psi = 0, \quad (\alpha = 1 \sim A,\ k = 1 \sim K). \tag{7.4.2}$$

力学量 f, g に対しては，ポアソン括弧を交換関係式で置き換えて

$$\{f, g\} \to \frac{1}{i\hbar}[f, g] \equiv \frac{1}{i\hbar}(fg - gf) \tag{7.4.3}$$

とする．

(7.4.2) の条件式（$A \times K$ 個ある）が互に整合的であるためにはさらなる条件式が要請される．その条件とは，２つの条件式

$$\Phi^k_\alpha \Psi = 0, \quad \Phi^l_\beta \Psi = 0 \tag{7.4.4}$$

が整合的であるためには

$$\left[\Phi^k_\alpha, \Phi^l_\beta\right] \Psi = 0 \tag{7.4.5}$$

が満されねばならないというものである．$[\Phi^k_\alpha, \Phi^l_\beta]$ は古典論では $i\hbar\{\Phi^k_\alpha, \Phi^l_\beta\}$ である．２つの第１類拘束のポアソン括弧はやはり第１類であるから*)，$\Phi^k_\alpha, \Phi^l_\beta$ が第１類であれば，第１類の１次結合なので，(7.4.5) は (7.4.2) に含まれ問題は生じない．しかし，Φ が第２類拘束条件 θ_s のとき

$$\theta_s \Psi = 0 \tag{7.4.6}$$

とおくと，$\{\theta_s, \theta_t\} \not\approx 0$ なので矛盾を生じる．それを除くには，θ_s を強等式でゼロになるようにしなければならない．そのためにディラック括弧をとるのである．例題 7.2 は質点系の場合の簡単な例である．よって

$$\{f, g\}^* \to \frac{1}{i\hbar}[f, g] \tag{7.4.7}$$

と対応をつけねばならない．ディラック括弧は，元来，拘束系の量子化への過程の一つとして導入されたものである．

質点系から場の理論への移行法については第６章で述べたが，ディラック括弧について，ここで付け加えておく．

場の量 $\phi_a(x)$ とそれに共役な運動量 $\pi^a(x)$ との間には同時刻のポアソン括弧

$$\left\{\phi_a(x), \pi^b(x')\right\}_{t=t'} = \delta^b_a \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{7.4.8}$$

を設定する．第２類拘束条件を $\theta_s \approx 0$ とし，θ_s 間の同時刻ポアソン括弧を

$$C_{st}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{t}) = \{\theta_s(x), \theta_t(x')\}_{t=t'} \tag{7.4.9}$$

と表す．この逆行列 $(C^{-1})^{st}$ は

$$\int d\boldsymbol{y} (C^{-1})^{st}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) C_{tu}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}', t) = \delta^s_u \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{7.4.10}$$

で定義される．これを用いてディラック括弧は次のように表される．

$$\begin{aligned}\{f(\boldsymbol{x}, t), g(\boldsymbol{x}', t)\}^* = \{f(\boldsymbol{x}, t), g(\boldsymbol{x}', t)\} - \int d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} \, \{f(\boldsymbol{x}, t), \theta_s(\boldsymbol{y}, t)\} \, (C^{-1})^{su}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, t) \\ \times \{\theta_u(\boldsymbol{z}, t), g(\boldsymbol{x}', t)\} \, .\end{aligned} \tag{7.4.11}$$

注*）２つの第１類拘束を Φ_1, Φ_2 とすると，すべての拘束条件 Φ とのポアソン括弧は ≈ 0，すなわち，第１類と第２類拘束の１次結合で表される．ヤコビ恒等式により $\{\Phi, \{\Phi_1, \Phi_2\}\} = -\{\Phi_1, \{\Phi_2, \Phi\}\} - \{\Phi_2, \{\Phi, \Phi_1\}\}$ である．右辺の $\{\Phi, \Phi_1\}, \{\Phi_2, \Phi\}$ は拘束条件の１次結合ゆえ，右辺 ≈ 0，よって $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ は第１類拘束である．

例題 7.4. ディラック括弧を用いた場の理論の量子化の例をあげる．次のモデルを考えよう．

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu + g\phi\partial_\mu A^\mu, \qquad (7.4.12)$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

($c = \hbar = 1$ の単位系をとる.) ϕ はスカラー場，A_μ はベクトル場で，それらの質量がそれぞれ m, M である．

このLから導かれる運動方程式は

$$\left.\begin{array}{l} \Box\phi + m^2\phi - g\partial_\mu A^\mu = 0, \\ \Box A_\mu - \partial_\mu\partial_\nu A^\nu + M^2 A_\mu - g\partial_\mu\phi = 0. \end{array}\right\} \qquad (7.4.13)$$

$\Box$ はダランベリアン $\partial_\mu\partial^\mu$ である．この第2式に ∂^μ を作用させて

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{g}{M^2}\Box\phi \qquad (7.4.14)$$

をえる．これにより (7.4.13) の第1式は

$$\Box\phi - \mu^2\phi = 0, \quad \mu^2 \equiv m^2\frac{M^2}{M^2 - g^2} \qquad (7.4.15)$$

となる．ここで次の置き換えをする；

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \frac{g}{M^2}\partial_\mu\phi. \qquad (7.4.16)$$

すると，(7.4.13) の第2式は

$$\Box\mathcal{A}_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\mathcal{A}^\nu + M^2\mathcal{A}_\mu = 0 \qquad (7.4.17)$$

となる．これより次式をえる；

$$\partial_\mu\mathcal{A}^\mu = 0, \quad (\Box + M^2)\mathcal{A}_\mu = 0. \qquad (7.4.18)$$

正準運動量は

$$\pi = \partial_0\phi, \quad \pi^0 = g\phi, \quad \pi^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \qquad (7.4.19)$$

であるから，1次拘束は

$$\theta_1 = \pi^0 - g\phi \approx 0 \qquad (7.4.20)$$

である．θ_1 の定常性から 2 次拘束

$$\theta_2 = -\partial_i \pi^i - M^2 A_0 + g\pi \approx 0 \tag{7.4.21}$$

をえる（導出は省略）．これらは第 2 類拘束条件である．

$$C_{12} = \{\theta_1(x,t), \theta_2(x',t)\} = (M^2 - g^2)\delta(x - x'). \tag{7.4.22}$$

上記運動方程式 (7.4.15)，(7.4.18) から，通常のように 4 次元交換関係式

$$\left.\begin{aligned}
&[\phi(x), \phi(x')] = i\Delta(x - x', \mu^2),^{*)} \\
&[\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x')] = i(-\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{M^2}\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x - x', M^2), \\
&[\phi(x), \mathcal{A}_\mu(x')] = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{7.4.23}$$

を設定すると，同時刻交換関係 (7.4.8) などと矛盾をきたす（詳細は文献 7 参照）．

正しい量子化法を次に示す．置換え (7.4.16) を元の L に代入すると

$$L = \frac{1}{2}\frac{M^2 - g^2}{M^2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu \tag{7.4.24}$$

をえる．ここで

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \tag{7.4.25}$$

であるが，(7.4.16) はゲージ変換に相当しているので $F_{\mu\nu}$ は不変である；

$$F_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

この (7.4.24) の L から導かれる運動方程式より，$\phi, \mathcal{A}_\mu$ に対する 4 次元交換関係として，次の式をえる．

$$\left.\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x')] = i(-\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{M^2}\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x - x', M^2), \\
&[\mathcal{A}_\mu(x), \phi(x')] = 0, \\
&[\phi(x), \phi(x')] = i\frac{M^2}{M^2 - g^2}\Delta(x - x', \mu^2)
\end{aligned}\right\} \tag{7.4.26}$$

この第 1，第 2 式を，(7.4.16) によって A_μ にもどし，さらに (7.4.22) を用いてディラック括弧を求めると，正しい量子化がなされる．すなわち (7.4.22) より

$$(C^{-1})^{12}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', t) = -\frac{1}{M^2 - g^2}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{7.4.27}$$

注＊）$\Delta(x, \mu^2)$ は 4 次元不変デルタ関数である．

を用いると同時刻のディラック括弧に対応する交換関係は

$$\left.\begin{aligned}[A_i(x),\pi(x')]^* &= [A_i(x),\partial_0'\phi(x')]^* = i\frac{g}{M^2-g^2}\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ [A_i(x),A_0(x')]^* &= i\frac{1}{M^2-g^2}\partial_i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\end{aligned}\right\} \tag{7.4.28}$$

$$\left.\begin{aligned}[A_i(x),\partial_0'A_j(x')]^* &= i\left(-\eta_{ij}-\frac{1}{M^2-g^2}\partial_i\partial_j\right)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ [\phi(x),\pi(x')]^* &= \frac{1}{g}[\pi^0(x),\pi(x')]^* = \frac{M^2}{g}[\phi(x),A_0(x')]^*\\ &= \frac{M^2}{g^2}[\pi^0(x),A_0(x')]^* = i\frac{M^2}{M^2-g^2}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}\right\} \tag{7.4.29}$$

となる．最後の式の変形では (7.4.19) の第 1 式と (7.4.26) の第 2 式を用いた．これら交換関係は，(7.4.26) からえられた A_μ,ϕ の交換関係を時間微分してえられる同時刻交換関係と矛盾しないことが確かめられる [7].

このように第 2 類拘束条件の存在する系の量子化はディラック括弧によってなされなければならない．

(1) L. Anderson and P. G. Bergmann; Phys. Rev. **83**, 1018 (1951)

(2) P. A. M. Dirac, Lecture Notes on Quantum Mechanics (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York 1964)
A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, Accademia Nationale dei Lincei, Rome #22 (1976)

(3) T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **27** (1962), 747

(4) T. Maskawa and H. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1295

(5) L. P. Eisenhart, Continuous Groups of Transformation (Dover Publication, INC New York 1961)

(6) 木村利栄・菅野礼司『微分形式による解析力学』改訂増補版（吉岡書店）

(7) T. Kimura and K. Senba, Nuov. Cim. **2** (1969), 752

第 8 章

ゲージ理論

拘束条件のうち，第２類拘束はディラック括弧を用いることにより，位相空間を縮減することがわかった．残る第１類拘束は全ハミルトン関数 H_T の中に任意関数 $\overset{(1)}{v^\alpha}$ を係数にもって入っている．本章では，まずその第１類拘束の意味を考察するが，第２類拘束はゲージ変換に関係ないので，話を簡単にするため第１類拘束条件のみ存在する場合を問題にする．第２類も共存する一般の場合は後半にまわす．

8.1 ゲージ変換

力学系の運動を生成するのは H_T である．（以下記号の単純化のため $\overset{(1)}{v^\alpha}, \overset{(1)}{\Phi}_\alpha$ を単に v^α, Φ_α と記す．）

$$H_T = H + v^\alpha{}_* \Phi_\alpha, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{8.1.1}$$

v^α は任意関数であるから，自由に選ぶことができる．v^α を変えれば力学系の時間発展は変る．3.4 節ネーターの第２定理で述べたように，任意関数を含む変数変換をゲージ変換といい，そのゲージ変換で不変な理論をゲージ理論という．したがって，H_T の中の v^α を変えることは q^i, p_i の時間発展の仕方を変えることになるから，v^α の変化はゲージ変換に対応しているのである．

このように，(8.1.1) の H_T による運動は一義的には決まらない．一つの v^α の任意性に対して一つのゲージ変換が対応するから，**v^α の数 R をゲージ自由度という．**

作用積分がゲージ変換で不変（準不変）であるとき，拘束条件が現われた（3.4 節参照）．作用積分がその変換で不変ならば，その理論は不変といえる．しかし，その場合には拘束条件が存在して，全ハミルトン関数 H_T に任意性が生ずる．ところが，

物理的量，すなわち観測可能量は一義的に決まらねばならない．したがって，力学的物理量は，運動方程式と初期値からその時間的発展が一義的に定まり，任意関数に依存すべきではない，つまりゲージ変換に対して不変でなければならない．電磁気学のマクスウエル理論は，例題 3.2 で示したように，電磁ポテンシャル A_μ の変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu = A_\mu(x) + \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x^\mu} \tag{8.1.2}$$

で不変である．A_μ 自体は不定であるから物理量にふさわしくないが，電場や磁場 $(\partial A_\mu/\partial x^\nu - \partial A_\nu/\partial x^\mu)$ は不変であるから，物理量である．

このように，ゲージ変換で不変なものを物理量とすべきである．その事情を概念的に図示すると（8.1 図）のようになる．点粒子が $t = t_0$ に同一点 (q_0, p_0) から出発し

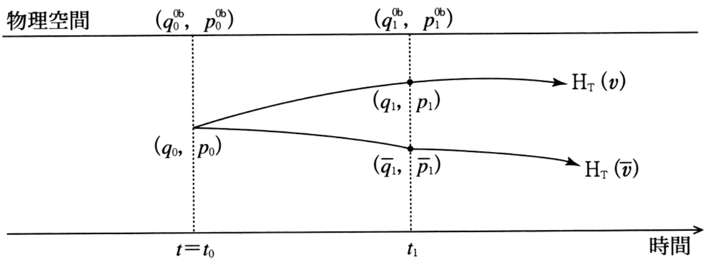


図 8.1

ても，v^α の値の異なる $H_T(v)$ で運動すると $t = t_1$ では異なる点 (q_1, p_1) と $(\bar{q}_1, \bar{p}_1)$ に移行するが，物理的状態は観測可能量 $\left(q^{ob}, p^{ob}\right)$ で定まることを図示した．ゲージ理論では系の物理的状態は $\left(q^i, p_i\right)$ ではなく，$\left(q^{iob}, p_i^{ob}\right)$ の組によって定まるのである．逆に見れば，物理的状態は $\left(q^i, p_i\right)$ を一義的に規程しえず，同じ物理的状態に対応する $\left(q^i, p_i\right)$ の組は v^α の変化に応じていろいろある．その自由度がゲージ自由度である．

ではゲージ変換を定めるもの，つまりゲージ変換の生成母関数（生成子）は何によって決まるのであろうか．3.4 節ですでに示唆したように，ゲージ変換は拘束条件 (3.4.9) や (3.4.10) と密接に関連している*)．（8.1 図）で (q_1, p_1) と $(\bar{q}_1, \bar{p}_1)$ の差は

注*）これらの拘束条件は，実は第 1 類なのである．ゲージ変換を表す関数 $\phi_\alpha^i, \psi_\alpha^i, \tau_\alpha$ が拘束条件の中

H_T の $v^\alpha{}_*\Phi_\alpha$ によって生成されるのであるから，少なくとも $_*\Phi_\alpha$ が関与することは明らかである．さらにゲージ変換の母関数は，$_*\Phi_\alpha$ ばかりでなく $_*\Phi_\alpha^2 = {}_*\dot{\Phi}_\alpha$（２次拘束条件）にもよることが次のようにしてわかる．

力学量 $g(t)$ は，$t=0$ の g_0 から微小時間 t の後の時刻には次のようになる：

$$g(t) = g_0 + \dot{g}_0 t + \frac{1}{2}\ddot{g}_0 t^2 + \cdots \tag{8.1.3}$$

ここに $\dot{g}_0 = dg/dt|_{t=0}, \ddot{g}_0 = d^2g/dt^2\big|_{t=0}$ である．この変化が (8.1.1) の H_T に従うときは，$\dot{g}_0 = \{g_0, H_T(v)\}$ であるから

$$g_v(t) = g_0 + t(\{g_0, H\} + v^\alpha\{g_0, {}_*\Phi_\alpha\}) + \frac{1}{2}t^2\Big(\{\{g_0, H\}, H\} + \{\{g_0, H\}, v^\alpha{}_*\Phi_\alpha\}$$
$$+ \{\dot{g}_0, v^\alpha{}_*\Phi_\alpha\} + \Big\{g_0, v^\alpha{}_*\dot{\Phi}_\alpha\Big\}\Big) + \cdots \tag{8.1.4}$$

となる．ここで v^α の代りに $\bar{v}$ をとったときの $g_{\bar{v}}(t)$ との差を求めると

$$g_v(t) - g_{\bar{v}}(t) \approx t(v^\alpha - \bar{v}^\alpha)\{g_0, {}_*\Phi_\alpha\} + \frac{1}{2}t^2\Big(\{\{g_0, H\}, (v^\alpha - \bar{v}^\alpha){}_*\Phi_\alpha\}$$
$$+ (v^\alpha - \bar{v}^\alpha)\{\dot{g}_0, {}_*\Phi_\alpha\} + (v^\alpha - \bar{v}^\alpha)\Big\{g_0, {}_*\dot{\Phi}_\alpha\Big\} + \cdots\Big) + \cdots \tag{8.1.5}$$

をえる．上式で $_*\dot{\Phi}_\alpha$ は $\{{}_*\Phi_\alpha, H_T\}$ である．よって，7.1 節で述べたように，これは２次拘束条件となる．それを $_*\Phi_\alpha^2$ と記すことにする．さらに高次の t^3 の項には $_*\ddot{\Phi}_\alpha = {}_*\dot{\Phi}_\alpha^2 = {}_*\Phi_\alpha^3$（３次拘束という）が現われる．

この結果から推測されるように，ゲージ変換を引き起す母関数は第１類１次拘束条件のみでなく，２次拘束 $_*\Phi_\alpha^2$ やそれ以上の拘束条件にも依存するのである．

8.2　ゲージ変換の生成子（母関数）*)

位相空間での力学量 $f(q,p,t)$ の運動方程式は，しばしば記してきたように

$$\dot{f}(q,p,t) = \{f, H_T\} + \frac{\partial f}{\partial t} = {}_*X_T f \tag{8.2.1}$$

である．ただし

$${}_*X_T = \frac{\partial H_T}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H_T}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{8.2.2}$$

に入っている．

注*）ゲージ変換の生成母関数を第１類拘束条件によって構成する方法を最初に求めたのは論文 (1), (2) である．

前節の考察でわかるように，この方程式で，異なる v^α をもつ運動はゲージ変換に対応している．すなわち，q^i, p_i のゲージ変換

$$q^i \to q^i + \delta q^i, \quad p_i \to p_i + \delta p_i \quad (i = 1 \sim N) \tag{8.2.3}$$

と

$$v^\alpha \to v^\alpha + \delta v^\alpha$$

とは同等であると見なしうる．すると

$$H_T = H\left(q + \delta q, p + \delta p\right) + v^\alpha{}_*\Phi_\alpha(q + \delta q, p + \delta p) \tag{8.2.4}$$

による運動と

$$H_T = H\left(q, p\right) + \left(v^\alpha + \delta v^\alpha\right){}_*\Phi_\alpha\left(q, p\right) \tag{8.2.5}$$

による運動とは同一ということになる [(3)]．よって

$${}_*X_T\big|_{q+\delta q, p+\delta p, v} = {}_*X_T\big|_{q, p, v+\delta v} \tag{8.2.6}$$

ここで ${}_*X_T\big|_{a,b,c}$ は ${}_*X_T$ の中の q, p, v を a, b, c で置き換えたものである．

他方，ゲージ変換の生成母関数を ${}_*G(q, p, \epsilon)$ で表すことにする．ϵ は微小正準変換のパラメータ関数で v^α の数と同じく R 個あり，時間 t の関数で $\epsilon^\alpha(t)$（場の理論のときは $\epsilon^\alpha(x)$）と記す．この ${}_*G(q, p, \epsilon)$ によって生ずる微小ゲージ変換は，4.6 節の微小正準変換にならって次式によって与えられる；

$$\delta q^i = \left\{q^i, {}_*G\right\} = \frac{\partial G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = \left\{p_i, {}_*G\right\} = -\frac{\partial_* G}{\partial q_i} \tag{8.2.7}$$

(8.2.7) は微分演算子

$${}_*X_G = \delta q^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \delta p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{\partial_* G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial_* G}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{8.2.8}$$

によって

$$\delta q^i = {}_*X_G q^i, \quad \delta p_i = {}_*X_G p_i \tag{8.2.9}$$

と表される．そして，一般の物理量 $f\left(q, p\right)$ のゲージ変換は，微小量の 1 次までとると

$$\delta f(q,p) = f(q+\delta q, p+\delta p) - f(q,p) = \delta q^i \frac{\partial f}{\partial q^i} + \delta p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$$
$$= \frac{\partial_* G}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial_* G}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \{f,_* G\} = {}_*X_G f \tag{8.2.10}$$

となる．f として H_T をとると

$$\delta H_T(q,p) = H_T(q+\delta q, p+\delta p) - H_T(q,p)$$
$$= \{H_T, {}_*G\} = {}_*X_G H_T \tag{8.2.11}$$

である．

(8.2.6) の両辺から ${}_*X_T|_{q,p,v}$ を引くと

$${}_*X_T|_{q+\delta q,p+\delta p,v} - {}_*X_T|_{q,p,v} = {}_*X_T|_{q,p,v+\delta v} - {}_*X_T|_{q,p,v} \tag{8.2.12}$$

となる．この式の意味はこうである．

この左辺は (8.2 図) に示すように，まず (q^i, p_i) をゲージ変換で $(q^i+\delta q^i, p_i+\delta p_i)$

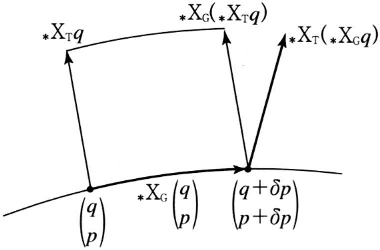


図 8.2

に移動し，その点を起点にして，時間発展したものが ${}_*X_T\left({}_*X_G q^i\right)$ 等である．微分は同一点におけるベクトル差で定義すべきである．それゆえ，(q^i, p_i) を起点にした ${}_*X_T q^i$（第 2 項）を $q^i + \delta q^i$ の点にゲージ変換で移動させた ${}_*X_G\left({}_*X_T q^i\right)$ と ${}_*X_T\left({}_*X_G q^i\right)$ の差をとらねばならない．これが (8.2.12) の意味である*)．これを q^i の代りに，一般化して力学量 $f(q,p)$ に適用すると，(8.2.1) と (8.2.8) などを用いて

注＊）これをリー微分という．また（8.2 図）と（8.3 図）で差をとるベクトルの起点が，(q,p) と $(q+\delta q, p+\delta p)$ とにずれているが，（8.2 図）の起点を (q,p) に移しても，その差は 2 次の微小量である．

$$
\begin{aligned}
左辺 &= {}_*X_G({}_*X_T f) - {}_*X_T({}_*X_G f) = {}_*X_G\left(\{f, H_T\} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - {}_*X_T\{f, {}_*G\} \\
&= \{\{f, H_T\}, {}_*G\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, {}_*G\right\} - \{\{f, {}_*G\}, H_T\} - \frac{\partial}{\partial t}\{f, {}_*G\} \\
&= \{{}_*G, \{H_T, f\}\} + \{H_T, \{f, {}_*G\}\} - \left\{f, \frac{\partial_* G}{\partial t}\right\} \\
&= -\{f, \{{}_*G, H_T\}\} + \left\{\frac{\partial_* G}{\partial t}, f\right\} = \left\{\{{}_*G, H_T\} + \frac{\partial_* G}{\partial t}, f\right\}
\end{aligned}
\tag{8.2.13}
$$

をえる．上式の最後で，ヤコビの恒等式 (4.2.11) を用いた．

他方 (8.2.12) 右辺の意味は $H_T(q, p, v + \delta v)$ と $H_T(q, p, v)$ による時間発展の差であるから，f に作用させると

$$
右辺 = {}_*X_{\delta v \Phi} f = \{f, \delta v^{\alpha}{}_*\Phi_\alpha\} \tag{8.2.14}
$$

である．これを図示すると（8.3 図）になる．

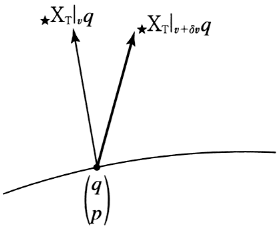


図 8.3

よって，(8.2.13) と (8.2.14) から

$$
\{{}_*G, H_T\} + \frac{\partial_* G}{\partial t} = -\delta v_*^{\alpha} \Phi_\alpha \tag{8.2.15}
$$

をえる．この結果は，第 1 類 1 次拘束条件 ${}_*\Phi_\alpha$ のもとでの ${}_*G$ の定常条件に他ならない．${}_*G$ は任意時刻での微小ゲージ変換の生成母関数であるから，この定常条件は当然満されねばならない．(8.2.15) は

$$
{}_*\dot{G}(q, p, \epsilon) = {}_*X_{T*}G \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\Phi_\alpha) \tag{8.2.16}
$$

と書ける．${}_*G$ の定常条件は重要な役割を果たすことが後に分かる．

${}_*G$ は第 1 次拘束 Φ_α を含むから，$\{{}_*G, H_T\}$ から 2 次拘束条件の出る場合には，${}_*\dot{G}$ は 2 次拘束を含む．それゆえ，(8.2.15) が成り立つためには，${}_*G$ は 2 次拘束以降次々に高次の第 1 類拘束を含まねばならないことを示している．

そこで，2 次以降の高次拘束条件を定義し，拘束条件を体系的に整理しておく必要がある．まず，1 次拘束 ${}_*\Phi_\alpha$ を ${}_*\Phi_\alpha^1$ と記し，${}_*\Phi_\alpha^1$ から導かれる 2 次拘束を ${}_*\Phi_\alpha^2$ というように，次々に導入していく．すなわち，${}_*\Phi_\alpha^1$ の定常条件の要請から

$$
{}_*\dot{\Phi}_\alpha^1 = {}_*\Phi_\alpha^2 \equiv \left\{ {}_*\Phi_\alpha^1, H_T \right\}, \tag{8.2.17}
$$

$$
{}_*\Phi_\alpha^{k+1} \equiv \left\{ {}_*\Phi_\alpha^k, H_T \right\}, \quad (k = 1 \sim K-1) \tag{8.2.18}
$$

そして最後が ${}_*\Phi_\alpha^K$ で，それ以上の高次拘束は出ないならば，$\dot{\Phi}_\alpha^K$ はゼロか，または Φ^k の 1 次結合で表されるはずであるから

$$
{}_*\dot{\Phi}_\alpha^K \equiv {}_*\Phi_\alpha^{K+1} = C_{\alpha k}^\beta {}_*\Phi_\beta^k \tag{8.2.19}
$$

となる*)．ところで，${}_*\Phi_\alpha^1$ は第 1 類拘束ゆえ，すべての拘束条件とのポアソン括弧は ≈ 0 であるから，(8.2.18) や (8.2.19) で，H_T の代りに $v^\alpha {}_*\Phi_\alpha^1$ を落した H で定義した方が簡単であり，しかもいろいろな点で便利である．このようにしても，Φ_α^k 全体は拘束条件の組として元のものと同等である．なぜならば，拘束条件には線形結合の任意性があるからである．そこで，改めて

$$
\left.
\begin{aligned}
{}_*\Phi_\alpha^{k+1} &\equiv \left\{ {}_*\Phi_\alpha^k, H \right\} \\
{}_*\Phi_\alpha^{K+1} &\equiv C_{\alpha k}^\beta \Phi_\beta^k
\end{aligned}
\right\} \tag{8.2.20}
$$

と定義し直そう．

ゲージ変換の母関数の作り方 (1),(2),(3)

これら ${}_*\Phi_\alpha^k$ を用いて，${}_*G$ を次のようにおく；

$$
{}_*G(q, p, \epsilon) = \epsilon_k^\alpha {}_*\Phi_\alpha^k. \tag{8.2.21}
$$

この ϵ_k^α を決めれば G は求まったことになる．G が ${}_*\Phi_\alpha^k$ の一次式で表わされ，これ以外にないことは後に証明する．

注*）一般的には，K は α ごとに異なるが，繁雑さを避けるためすべて同一とした．一般化は容易である．

ϵ_k^α は ${}_*G$ の定常条件 (8.2.15) によって求められるのであるが，その式の H_T には任意関数 v^α が入っているので，次の２つの式に分解される．

$$ {}_*X_{t*}G \equiv \{{}_*G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = -\epsilon_0^\alpha {}_*\Phi_\alpha^1, \tag{8.2.22} $$

$$ \left\{{}_*G, {}_*\Phi_\alpha^1\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi_\alpha^1\right) \tag{8.2.23} $$

上式で ${}_*X_t$ は ${}_*X_T(v=0)$ であり，ϵ_0^α は未定関数である．

(8.2.21) を (8.2.22) に代入すると

$$ \dot{\epsilon}_k^\alpha {}_*\Phi_\alpha^k + \epsilon_k^\alpha {}_*\Phi_\alpha^{k+1} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) $$

となるが，第２項で k の和の最後の項 $\epsilon_K^\alpha {}_*\Phi_\alpha^{K+1}$ は (8.2.20) の第２式によって置き換えられるから，上式は

$$ \dot{\epsilon}_k^\alpha {}_*\Phi_\alpha^k + \epsilon_k^\alpha {}_*\Phi_\alpha^{k+1} + \epsilon_K^\alpha C_{\alpha k}^\beta {}_*\Phi_\beta^k \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) \tag{8.2.24} $$

となる．ここで $\dot{\epsilon}_k^\alpha$ は

$$ {}_*X_t\epsilon_k^\alpha \equiv \{\epsilon_k^\alpha, H\} + \frac{\partial \epsilon_k^\alpha}{\partial t} \tag{8.2.25} $$

である．ϵ_k^α は通常のゲージ理論では t のみの関数であるから，その場合は $\{\epsilon_k^\alpha, H\}$ はゼロである．(8.2.24) で ${}_*\Phi_\alpha^k$ は独立であるから，${}_*\Phi_\alpha^1$ を除きその係数ごとにゼロでなければならない．よって

$$ \dot{\epsilon}_k^\alpha + \epsilon_{k-1}^\alpha + \epsilon_K^\beta C_{\beta k}^\alpha = 0, \quad \begin{array}{l}(k = 2 \sim K) \\ (\alpha, \beta = 1 \sim R)\end{array} \tag{8.2.26} $$

この式の $C_{\beta k}^\alpha$ は (8.2.20) で導入されたことからわかるように，拘束条件間の構造を与えるものであるから，L または H が与えられると定まっている量である．それゆえ，(8.2.26) は，ϵ_K^α から $\epsilon_k^\alpha (k < K)$ を次々に決める漸化式である．したがって ϵ_k^α は ϵ_K^α を与えれば，逐次に求めることができる．

それゆえ，R 個の ϵ_K^α ごとにゲージ変換が一つ存在するから，各ゲージ自由度 α に対して一つのゲージ関数 $\epsilon^\alpha\,(\equiv \epsilon_K^\alpha)$*) とゲージ変換が与えられることになる．したがって，**ゲージ自由度の数は第１類１次拘束条件の数 R に等しい**．その意味で，１次拘束条件の数 R は重要である．

注*）以後，ϵ_K^α の K を省略して単に ϵ^α と書く．

ところで，${}_*G$ の満すべき条件は (8.2.22) から導かれた (8.2.26) のみでなく，(8.2.23) との連立方程式であるから，$\epsilon^\alpha\,(\equiv \epsilon^\alpha_K)$ を任意にとることはできない．通常のゲージ理論（電磁場やヤン-ミルス場）では ϵ^α は時間 t（場の理論では x^μ）の任意関数の解 $\epsilon^\alpha(t)$ を有する．いずれにせよ，(8.2.23)

$$\epsilon^\beta_k\left\{{}_*\Phi^k_\beta, {}_*\Phi^1_\alpha\right\} + \left\{\epsilon^\beta_k, {}_*\Phi^1_\alpha\right\}{}_*\Phi^k_\beta \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) \tag{8.2.27}$$

を満す最も一般的な $\epsilon^\alpha_K = \epsilon^\alpha$ を見い出し，それを (8.2.26) に用いればよいのである．しかし，(8.2.27) は，ϵ^α として t のみの関数 $\epsilon^\alpha(t)$ では一般には満されなく，q^i, p_i, t の関数でなければ解でないこともある（例題 8.4 参照）．ここでさらに注意すべきことは，たとえ t のみの関数 ϵ^α が (8.2.27) の解として許されても，$\epsilon^\alpha_k (k < K)$ は q^i, p_i に依存する場合があるということである．その理由は，$C^\alpha_{\beta k}$ が q^i, p_i に依存する場合があるからである．また，(8.2.26) から，逐次 ϵ^α_1 を求めると，ϵ^α の時間微分は最高階 $d^{K-1}\epsilon^\alpha/dt^{K-1}$ まで現われるので，${}_*G$ も ϵ^α の $K-1$ 階の時間微分を含むことになる．

次の問題は，(8.2.22) と (8.2.23)，いいかえれば，(8.2.26) と (8.2.27) の連立方程式を満す ϵ^α_k の組は常に存在するかということである．結論をいうと，常に存在する．その証明は次節で示すように，${}_*G$ は第 1 類の線形結合で必ず表されるからである．

以上のことをまとめると，**ゲージ変換の生成母関数 ${}_*G$ は**

(1) 第 1 類拘束条件の 1 次結合 (8.2.21) で表される．

(2) ${}_*G$ は定常条件 (8.2.15)，すなわち (8.2.22) と (8.2.23) を満さねばならない．

(3) ${}_*G$ の表式は最高次の拘束条件 ${}_*\Phi^K_\alpha$ の係数因子 $\epsilon^\alpha \equiv \epsilon^\alpha_K(t)$ によって決定される．

(4) ゲージ自由度は第 1 類 1 次拘束条件の数 $R\,(\alpha = 1 \sim R)$ に等しい．

(5) q^i, p_i のゲージ変換は次式で与えられる；

$$\delta q^i = \left\{q^i, {}_*G\right\}, \quad \delta p_i = \left\{p_i, {}_*G\right\} \tag{8.2.28}$$

例題 8.1. 簡単なゲージ不変な質点系

自由度 3 の質点系のラグランジュ関数として次のものをとる.

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^1 - q^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - q^3\right)^2 \tag{8.2.29}$$

この L より導かれる拘束条件を求める. 運動量は

$$p_1 = \dot{q}^1 - q^2, \quad p_2 = \dot{q}^2 - q^3, \quad p_3 = 0 \tag{8.2.30}$$

だから, 1 次拘束条件は 1 つ ($\alpha = 1$ のみであるから省略)

$${}_*\Phi^1 = p_3 \approx 0 \tag{8.2.31}$$

正準ハミルトン関数 H は

$$H = p_i\dot{q}^i - L = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + p_1 q^2 + p_2 q^3 \tag{8.2.32}$$

$$H_T = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + p_1 q^2 + p_2 q^3 + v p_3 \tag{8.2.33}$$

これより ${}_*\Phi^1$ の定常条件は, (8.2.20) を用いて

$${}_*\dot{\Phi}_1 = {}_*\Phi_2 = \{p_3, H\} = -p_2 \approx 0$$

となる. これは 2 次拘束条件である. さらに ${}_*\Phi^2$ の定常条件から

$${}_*\Phi^3 = \{-p_2, H\} = p_1 \approx 0$$

がでる. $\left\{{}_*\Phi^3, H\right\} = 0$ であるから $C^{\beta}_{\alpha k} = 0$ となり, これ以上拘束条件はでない. よって拘束条件の組は全部で

$${}_*\Phi^1 = p_3, \quad {}_*\Phi^2 = -p_2, \quad {}_*\Phi^3 = p_1 \tag{8.2.34}$$

これらのポアソン括弧は互にすべてゼロであるから, ${}_*\Phi^k$ はすべて第 1 類拘束である.

よって, ゲージ変換の母関数 G は

$${}_*G = \epsilon_{k*}\Phi^k = \epsilon_1 p_3 - \epsilon_2 p_2 + \epsilon_3 p_1 \tag{8.2.35}$$

次は，この ${}_*G$ の定常条件 (8.2.22) から導かれた (8.2.26) によって ϵ_k を求める．$C^{\alpha}_{\beta k}=0$ であるから

$$\dot{\epsilon}_k+\epsilon_{k-1}=0, \quad (k=2,3) \tag{8.2.36}$$

となる．他方，${}_*G$ が満すべきもう一つの条件式 (8.2.23) より導かれた (8.2.27) は第 1 項はゼロであるゆえ，ϵ_k が t のみの関数であれば，自働的に満される．

よって，$\epsilon_3=\epsilon(t)$ とすると，(8.2.36) によって

$$\epsilon_2=-\dot{\epsilon}_3=-\dot{\epsilon}(t), \quad \epsilon_1=-\dot{\epsilon}_2=\ddot{\epsilon}(t)$$

をえる．かくして，

$${}_*G=\ddot{\epsilon}(t)p_3+\dot{\epsilon}(t)p_2+\epsilon(t)p_1 \tag{8.2.37}$$

をえる．これがラグランジュ関数 (8.2.29) を不変にするゲージ変換の母関数である．

実際に，

$$\left.\begin{aligned}&\delta q^1=\left\{q^1,{}_*G\right\}=\epsilon(t), \quad \delta q^2=\left\{q^2,{}_*G\right\}=\dot{\epsilon}(t)\\&\delta q^3=\left\{q^3,{}_*G\right\}=\ddot{\epsilon}(t)\end{aligned}\right\} \tag{8.2.38}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\delta L&=\left(\delta\dot{q}^1-\delta q^2\right)\left(\dot{q}^1-q^2\right)+\left(\delta\dot{q}^2-\delta q^3\right)\left(\dot{q}^2-q^3\right)\\&=\left(\dot{\epsilon}-\dot{\epsilon}\right)\left(\dot{q}^1-q^2\right)+\left(\ddot{\epsilon}-\ddot{\epsilon}\right)\left(q^2-q^3\right)=0.\end{aligned}$$

なお，この ${}_*G$ は q^i によらないので，$\delta p_i=-\partial_*G/\partial q^i=0$ である．他方 (8.2.30) の p_i と (8.2.38) の δq^i から，やはり $\delta p_i=0$ をえるので，(8.2.28) は満される．

例題 8.2.　電磁場（第 6 章例題 6.1 参照）

ラグランジュ関数は，電磁場の 4 元ベクトルポテンシャルを $A_\mu(x)$ とすると，

$$L=\int d^3x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], \quad F_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x) \tag{8.2.39}$$

で与えられる．ヘシアン行列は (6.2.15) により

$$A^{\mu\nu}=\left(g^{\mu0}g^{\nu0}-g^{\mu\nu}\right)\delta^4(x-x')=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\delta^4(x-x'),$$

$g^{\mu\nu}$ はローレンツ計量である；

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A_0, A_i に対する正準運動量は (6.2.20) と (6.2.21) の

$$\pi^0 = 0, \quad \pi^i = F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \tag{8.2.40}$$

である．ハミルトン関数は

$$H = \int d^3x[\pi^i \dot{A}_i - \boldsymbol{L}] = \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i - A_0\left(\partial_i\pi^i\right) + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \right] \tag{8.2.41}$$

となる．

1 次拘束条件は

$$_*\Phi^1 = \pi^0 \approx 0 \tag{8.2.42}$$

2 次拘束条件は

$$_*\Phi^2 = \left\{ _*\Phi^1, H \right\} = \partial_i\pi^i \tag{8.2.43}$$

$$_*\dot{\Phi}^2 = \left\{ _*\Phi^2, H \right\} = -\frac{1}{2}\partial_k\left(\delta_j^k\partial_i - \delta_i^k\partial_j\right)F^{ij} = 0$$

それゆえ，拘束条件は $_*\Phi^1$ と $_*\Phi^2$ のみである．そして $C^{\alpha}_{\beta k} = 0$.

ゲージ変換の母関数は

$$_*G = \int d^3x[\epsilon_1(x)\pi_0(x) + \epsilon_2(x)\partial_i\pi^i(x)] \tag{8.2.44}$$

と表される．G の定常条件から

$$\dot{\epsilon}_2(x) + \epsilon_1(x) = 0 \tag{8.2.45}$$

(8.2.27) は $\epsilon_2(x) \equiv -\epsilon(x)$ とすると自働的に満される．よって

$$_*G = \int d^3x\left[\dot{\epsilon}(x)\pi^0(x) - \epsilon(x)\partial_i\pi^i(x)\right]$$

となる．この第 2 項を部分積分し，$x \to \infty$ で $A_\mu \to 0$ として変形すると

$$_*G = \int d^3x\pi^\mu(x)\partial_\mu\epsilon(x) \tag{8.2.46}$$

をえる．

この ${}_*G$ によって生成されるゲージ変換は

$$\delta A_\nu(x) = \{A_\nu(x), {}_*G\} = \int d^3x' \{A_\nu(x), \pi^\mu(x')\} \partial_\mu \epsilon(x')$$
$$= \delta^\mu_\nu \int d^3x' \delta(x - x') \partial_\mu \epsilon(x') = \partial_\nu \epsilon(x) \tag{8.2.47}$$

となる．

$F_{\mu\nu}$ はゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x) \tag{8.2.48}$$

によって

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \to \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \epsilon - (\partial_\nu A_\nu + \partial_\nu \partial_\mu \epsilon) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

のように不変である．よって ${}_*G$ は (8.2.39) の L を不変にするゲージ変換の母関数である．

例題 8.3.　ヤン-ミルス場，$C^\alpha_{\beta k} \neq 0$ の場合

ポテンシャルはローレンツ空間の添字 μ の他に，内部対称性の自由度を表す添字 a を有する $A^a_\mu(x)$ である．a の数は対称性の型により決まるが，ここでは a の範囲は特に定めないでおく．

場の強さを表す $F^a_{\mu\nu}$ は

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) + g f^a_{bc} A^b_\mu(x) A^c_\nu(x) \tag{8.2.49}$$

である．ラグランジュ関数は

$$L = \int d^3x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \right) \tag{8.2.50}$$

で与えられる．g はヤン-ミルス場の結合定数，f^a_{bc} は，a, b, c に関しては完全反対称であり，次の関係を満す

$$f^a_{bc} f^c_{de} + f^a_{dc} f^c_{eb} + f^a_{ec} f^c_{bd} = 0 \tag{8.2.51}$$

また，ヘシアン行列は

$$A^{\mu\nu}_{ab} = \delta_{ab} \left(g^{\mu 0} g^{\nu 0} - g^{\mu\nu} \right) \delta^4(x - x')$$

(μ,ν) に関する行列の階数は 3 で，拘束条件は 1 つであるが，それに (a,b) 行列がつくので，a の数だけの 1 次拘束条件が現われる．

正準運動量は $\pi_a^\mu = F_a^{0\mu}$ である．すなわち

$$\pi_a^0(x) = 0 \quad \pi_a^i(x) = F_a^{0i} = \partial^0 A_a^i - \partial^i A_a^0 + gf_a^{bc} A_b^0 A_c^i \tag{8.2.52}$$

であるから，1 次拘束条件は

$$_*\Phi_a^1 = \pi_a^0 \approx 0 \tag{8.2.53}$$

ハミルトン関数密度は

$$\boldsymbol{H_T} = -\frac{1}{2}\pi_a^i \pi_i^a - A_0^a D_{ai}^b \pi_b^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} + v^a \pi_a^0 \tag{8.2.54}$$

となる．ここに D_{bi}^a は次に示す微分演算子である

$$D_{b\mu}^a \equiv \delta_b^a \partial_\mu - gf_{bc}^a A_\mu^c \tag{8.2.55}$$

$_*\Phi_a^1$ の定常条件より 2 次拘束は，

$$_*\Phi_a^2 = \left\{ {}_*\Phi_a^1, H \right\} = D_{ai}^b F_b^{0i} = D_{ai}^b \pi_b^i \tag{8.2.56}$$

そして，

$$\left\{ {}_*\Phi_a^1(x), {}_*\Phi_b^2(x') \right\}_{t=t'} = 0, \quad \left\{ {}_*\Phi_a^2(x), {}_*\Phi_b^2(x') \right\}_{t=t'} = -gf_{ab}^c {}_*\Phi_c^2(x)\delta(x-x')$$

である．よって $_*\Phi_a^1, {}_*\Phi_a^2$ は第 1 拘束である．さらに

$$_*\dot{\Phi}_a^2 = \left\{ {}_*\Phi_a^2, H \right\} = -gf_{abc} A_0^b D_{di}^c \pi^{di} = -gf_{ab}^c A_0^b {}_*\Phi_c^2 \tag{8.2.57}$$

となるから，これ以上拘束条件は現れない．ヤン-ミルス場は (8.2.20) の $C_{\alpha k}^\beta \neq 0$ の例である；

$$C_{b1}^a = 0, \quad C_{b2}^a = -gf_{cb}^a A_0^c \tag{8.2.58}$$

ϵ_k^α を決定する (8.2.26) は，この場合

$$\dot{\epsilon}_2^a + \epsilon_1^a + \epsilon_2^b C_{b2}^a = \dot{\epsilon}_2^a + \epsilon_1^a - gf_{cb}^a A_0^c \epsilon_2^b = 0 \tag{8.2.59}$$

となる．よって，$\epsilon_2^a = -\epsilon^a(x)$ とおくと，ゲージ変換の母関数は

$$_*G = \int d^3x \left[\left(\dot{\epsilon}^a - gf_{bc}^a A_0^c \epsilon^b \right) \pi_a^0 - \epsilon^a D_{ai}^b \pi_b^i \right] \tag{8.2.60}$$

となる．もう一つの条件 (8.2.27) も ϵ_2^a を x^μ のみの関数とすれば，満されることは次のようにして分る．(8.2.27) の第 1 項は，$\left\{{}_*\Phi_b^2, {}_*\Phi_a^1\right\} = 0$ であるからゼロとなる．第 2 項は

$$\left\{\epsilon_1^b, {}_*\Phi_a^1\right\} {}_*\Phi_b^1 + \left\{\epsilon_2^b(x), {}_*\Phi_a^1\right\} {}_*\Phi_b^2 = \left\{\epsilon_1^b, {}_*\Phi_a^1\right\}_* \Phi_b^1 \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right)$$

が残る．$\epsilon_1^a = -\dot{\epsilon}_2^a + g f_{cb}^a A_0^c \epsilon_2^b$ ゆえ，$\left\{\epsilon_1^b, {}_*\Phi_a^1\right\} \neq 0$ であるが，$\mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right)$ により明らかに満されている．よって (8.2.60) が求める ${}_*G$ であるが，形を整えるために，第 2 項の D_{ai}^b を部分積分して ϵ^a の方に移して整理すると

$$ {}_*G = \int d^3x [\pi_a^\mu(x) D_{b\mu}^a \epsilon^b(x)] \tag{8.2.61}$$

となる．

この ${}_*G$ を用いて $A_\mu^a(x)$ のゲージ変換として

$$\delta A_\mu^a = \left\{A_\mu^a(x), {}_*G\right\} = D_{b\mu}^a \epsilon^b(x) \tag{8.2.62}$$

をえる．この変換のもとで L が不変であることを示すにはやや長い計算が必要であるので，その要点のみ示しておく．

$$\delta L = -\frac{1}{2}\delta F_{\mu\nu}^a \cdot F_a^{\mu\nu} \tag{8.2.63}$$

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu\left(\delta A_\nu^a\right) - \partial_\nu\left(\delta A_\mu^a\right) + g f_{bc}^a\left(\delta A_\mu^b \cdot A_\nu^c + \delta A_\nu^c \cdot A_\mu^b\right)$$

この式の δA_μ^a に (8.2.62) を代入し，(8.2.55) を用いて残るものを整頓すると

$$\delta F_{\mu\nu}^a = -g f_{bc}^a\left(\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c\right)\epsilon^b + g^2 f_{bc}^a f_{de}^b\left(A_\mu^d A_\nu^c - A_\nu^d A_\mu^c\right)\epsilon^e$$

となる．ここで f_{bc}^a の完全反対称性と (8.2.51) を用いると

$$\delta F_{\mu\nu}^a = -g f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c \epsilon^b \tag{8.2.64}$$

をえる．したがって

$$\delta L = \frac{1}{2} g f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c F_a^{\mu\nu} \epsilon^b \tag{8.2.65}$$

となるが，$F_{\mu\nu}^c F_a^{\mu\nu}$ は a, c について対称であり，f_{bc}^a は a, c につき反対称であるから，a, c の和をとったものはゼロになる．よって $\delta L = 0$ となる．

例題 8.4. ϵ^α が q, p に依存する場合

${}_*G$ の定常条件の一つ (8.2.27) の解 $\epsilon^\alpha_K = \epsilon^\alpha$ が t のみの関数でなく，q^i に依存するモデルラグランジュ関数を示す．このモデルは，いくつかの点で重力理論と類似している．

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{c}{(q)^2}, \quad (i, j = 1 \sim N) \tag{8.2.66}$$

ここに，c は定数．

$$g_{ij}(q) = \delta_{ij} - \frac{q^i q^j}{(q)^2}, \quad (q)^2 = \sum_i q^i q^i \tag{8.2.67}$$

である．ヘシアン行列 g_{ij} の階級は $N-1$ で，正準運動量は

$$p_i = g_{ij}\dot{q}^j \tag{8.2.68}$$

である．

よって 1 次拘束条件は一つ

$${}_*\Phi^1 = p_i q^i = g_{ij}\dot{q}^j q^i = \sum_i \left(\dot{q}^i q^i - \dot{q}^i q^i\right) = 0 \tag{8.2.69}$$

また，

$$\sum_j g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \text{より} \quad (p)^2 = \sum_i p_i p_i = p_i\dot{q}^i - \left(p_i q^i\right)\sum_j \frac{q^j\dot{q}^j}{(q)^2} = p_i\dot{q}^i$$

を考慮すると，正準ハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2}(p)^2 + \frac{c}{(q)^2} \tag{8.2.70}$$

となる．2 次拘束は

$${}_*\Phi^2 = \left\{{}_*\Phi^1, H\right\} = (p)^2 + \frac{2c}{(q)^2} = 2H \tag{8.2.71}$$

これ以上拘束条件はでない．$\left\{{}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2\right\} = 2{}_*\Phi^2$ ゆえ，これらは第 1 類拘束である．

ゲージ変換の母関数

$${}_*G = \epsilon_{1*}\Phi^1 + \epsilon_{2*}\Phi^2$$

の定常条件より導かれる制約は

$$\epsilon_1 + \dot{\epsilon}_2 = 0 \tag{8.2.72}$$

と (8.2.27) から生ずる

$$\left\{{}_*G, {}_*\Phi^1\right\} = \left\{\epsilon_{2*}\Phi^2, {}_*\Phi^1\right\} = \left(-2\epsilon_2 + \{\epsilon_2, (pq)\}\right){}_*\Phi^2 \equiv 0 \mod \left({}_*\Phi^1\right)$$

である．この上式は ϵ_2 が t のみの関数では満されないことは明らかである．この式の解として

$$\epsilon_2 = \epsilon(t)(q)^2 + \zeta(t)(p)^{-2}$$

がえられる．$\zeta(t)$ は $\epsilon(t)$ とは独立なゲージ関数である．この第 2 項は特異なので落し，

$$\epsilon_2 = \epsilon(t)(q)^2$$

をとれば充分である．

すると，

$$\epsilon_1 = -\dot{\epsilon}_2 = -\dot{\epsilon}(t)\cdot(q)^2 - \epsilon\left\{(q)^2, H\right\} = -\dot{\epsilon}\cdot(q)^2 - 2(pq)\epsilon$$

となり，

$${}_*G = (q)^2\left[-\dot{\epsilon}(t){}_*\Phi^1 + \epsilon(t){}_*\Phi^2\right] \tag{8.2.73}$$

をえる．ただし，${}_*G$ の中の $\left({}_*\Phi^1\right)^2$ の項は強い意味でゼロなので落した．

1 次拘束条件の特殊性

以上のことから，**第 1 類拘束条件の現われる力学系では非正則ラグランジュ関数 L が与えられれば，その系の拘束条件から，ゲージ変換の生成母関数 ${}_*G$ を機械的に求める方法がわかった**．その ${}_*G$ はすべての第 1 類拘束条件の一次結合で表される．

ここで問題になるのは，${}_*G$ の定常条件 (8.2.22) と (8.2.23) の連立方程式の解について，その解は常に存在するかということである．つまり，(8.2.26) は ϵ_k^α の漸化式であるから，$\epsilon_K^\alpha \equiv \epsilon^\alpha$ を与えれば，$\epsilon_k^\alpha (k < K)$ は機械的に求まるが，(8.2.27) の解の存在は自明ではないからである．しかし，その解は常に存在することを次節で示す．そして，同次にゲージ自由度 R は 1 次拘束条件 ${}_*\Phi_\alpha^1(\alpha = 1 \sim R)$ の数に等しいこともわかる．それゆえ，1 次拘束条件は 2 次以降の拘束条件 ${}_*\Phi_\alpha^k(k > 1)$ とは異なる特別の意味と役割をもっている．実際に，次に示す特殊な性質が ${}_*\Phi_\alpha^1$ にはある [4]．

3.4 節で指摘したように，1 次拘束 ${}_*\Phi_\alpha^1$ は速度位相空間では恒等的にゼロである；

$${}_*\Phi_\alpha^1(q,p) \approx 0 \to \Phi_\alpha^1(q, p(q,\xi)) \equiv 0 \tag{8.2.74}$$

この性質は第1類，第2類拘束ともに有するものであるが，２次以降の高次拘束条件にはない．

$\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi))$ は恒等的に消えるから，

$$\frac{\partial\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi))}{\partial\xi^i}=\frac{\partial\Phi^1_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j(q,\xi)}{\partial\xi^i}=\frac{\partial\Phi^1_\alpha}{\partial p_j}A_{ij}(q,\xi)\equiv 0 \tag{8.2.75}$$

ここに A_{ij} はヘシアン行列である．それゆえ，$\partial\Phi^1_\alpha/\partial p_j$ は A_{ij} のゼロ固有値に対応する固有ベクトル τ^j_α に他ならない．よって

$$\frac{\partial\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi))}{\partial p_i}=\tau^i_\alpha(q,\xi),\quad (\alpha=1\sim R) \tag{8.2.76}$$

このように１次拘束 Φ^1_α は A_{ij},τ^i_α と密接に関連しており，それゆえゲージ自由度と直接結びついている．この事実は，**１次拘束は２次以降の拘束条件とその出所および性質において，本質的に異なる**ことを示すものである．**これが第１類拘束に関するディラックの予想が成り立たないことの根拠の一つである***)．

また，q^i で微分すると

$$\frac{\partial\Phi^1_\alpha}{\partial q^i}=\frac{\partial\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi))}{{}_*\partial q^i}+\frac{\partial\Phi^1_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial p_j(q,\xi)}{\partial q^i}\equiv 0$$

ここで $\partial/{}_*\partial q^i$ は $\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi))$ で $p(q,\xi)$ の中の q については微分せず，位相空間における Φ^1_α に陽に含まれている q のみ微分することを示すものである．上式に(8.2.76) を代入して

$$\frac{\partial\Phi^1_\alpha}{{}_*\partial q^i}+\tau^j_\alpha\frac{\partial p_j}{\partial q^i}=0 \tag{8.2.77}$$

をえる (4)．

１次拘束条件は，(8.2.74)，(8.2.75) から明らかなように，ヘシアン行列 A_{ij} とそのゼロ固有値ベクトル τ^i_α とに密接に関連している．τ^i_α は R 個存在するから，A_{ij} の階数は $(N-R)$ である．これらの結論は，これまで述べてきたことと整合している．

注*）第１類拘束のとき，１次拘束条件と２次以降の拘束条件とは，同等であって区別する必要がないというディラックの予想のために誤解があり，我々の主張した１次拘束の特殊性を認めようとしない論調があった．しかし，Φ^1_α のこの特殊性や，ゲージ変換の母関数の作り方からしても，それは誤りである．さらに詳細な考察はもう一度第 11 章 11.1 節で行う．

8.3　ゲージ変換の母関数はすべて第 1 類拘束の 1 次結合

前節で，第 1 類拘束のみ存在する力学系の場合，微小ゲージ変換の生成母関数 $_*G$ は第 1 類拘束の一次結合で表されることを示したが，逆に，非正則ラグランジュ関数がゲージ変換のもとで準不変（3.3 節参照）であるとき，そのゲージ変換の母関数 G は必ず第 1 類拘束の 1 次結合で表されることを示そう [(5)]．その結果は，$_*G$ の満すべき定常条件 (8.2.22) と (8.2.23) は任意関数 $\epsilon^\alpha(q,p,t)$ を含む解を常に有することの証明でもある．

いま，ラグランジュ関数 $L\,(q,\dot{q})$ が，微小変換

$$
\begin{aligned}
\delta q^i &= \epsilon^\alpha(t) g^i_{\alpha 0}\,(q,\dot{q}) + \dot{\epsilon}^\alpha g^i_{\alpha 1}\,(q,\dot{q}) + \cdots + \overset{(K-1)}{\epsilon^\alpha}\; g^i_{\alpha, K-1}, \quad (i = 1 \sim N) \\
&\equiv \sum_{k=0}^{K-1} D^k \epsilon^\alpha(t) g^i_{\alpha k}\,(q,\dot{q}), \quad \left(D^k \equiv \frac{d^k}{dt^k}\right), \\
\delta \dot{q}^i &= D \delta q^i
\end{aligned}
\tag{8.3.1}
$$

に対して準不変であるとする．$\epsilon^\alpha(t)$ は任意関数，$g^i_{\alpha k}\,(q,\dot{q})$ は L によって定まっているある関数であり，その最高階の $g^i_{\alpha K-1}$ は α ごとに独立関数とする*）．このゲージ変換は ϵ^α の $K-1$ 階微分 $D^{k-1}\epsilon^\alpha$ まで含みうるが，力学変数 q^i は速度 $\dot{q}^i$ までであって，加速度にはよらないことに注意されたい．その理由は L が $\dot{q}^i$ 以上の高階微分によらないからである．

仮定により，この変換に対して L は準不変であるから，ある関数の時間微分の不定性を考慮して

$$
\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = DF\,(q,\dot{q},\epsilon)\,, \quad (D = d/dt) \tag{8.3.2}
$$

となる．ここに F は L と δq^i (8.3.1) の形に依存して定まる関数である．

上式の δq^i と $\delta \dot{q}^i$ に (8.3.1) を代入して，拘束条件を導出するのである．その特別な場合として，すでに $K=2$ について 3.4 節でネーターの第 2 定理として拘束条件を導くところまで説明した．その拘束条件からゲージ変換の母関数 G を構成できることを示すのであるが，任意の K についての一般論はやや複雑なので，まず手始めに，$K=2$ の場合を扱い，話の筋道を理解するのがよいだろう．

注*）K は α ごとに異なってよいが，簡単化のために同一とする．一般化は容易である．

3.4 節の主な筋道を再現する（ただし，$\delta t=0$ とし，記号は本節のものに直す）．(8.3.1) の変分 δq^i は $K=2$ のとき

$$\delta q^i = \epsilon^\alpha(t) g^i_{\alpha 0}(q,\dot{q}) + D\epsilon^\alpha(t) g^i_{\alpha 1}(q,\dot{q}), \quad \delta\dot{q}^i = D\delta q^i \tag{8.3.3}$$

となる．他方，(8.3.2) の δL は次のように変形される；

$$\delta L = [L]_i \delta q^i + D\left(p_i \delta q^i\right) = DF \tag{8.3.4}$$

ただし，$p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$ であり，$[L]_i$ はオイラー微分

$$[L]_i \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - D\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - Dp_i \tag{8.3.5}$$

である．

(8.3.4) の右辺の F は (8.3.3) と (8.3.4) からわかるように，次のように展開される，

$$F(q,\dot{q},\epsilon) = \epsilon^\alpha(t) f_{\alpha 0}(q,\dot{q}) + D\epsilon^\alpha(t) f_{\alpha 1}(q,\dot{q}) \tag{8.3.6}$$

ここで，(8.3.3) と (8.3.6) を (8.3.4) に代入して，右辺を左辺に移行すると次の恒等式をえる；

$$I \equiv \delta L - DF = [L]_i\left(\epsilon^\alpha g^i_{\alpha 0} + D\epsilon^\alpha \cdot g^i_{\alpha 1}\right) + D\left\{\epsilon^\alpha \Psi_{\alpha 0} + D\epsilon^\alpha \cdot \Psi_{\alpha 1}\right\} \equiv 0, \tag{8.3.7}$$

ここに，

$$\Psi_{\alpha k} \equiv p_i g^i_{\alpha k} - f_{\alpha k}, \quad (k=0,1) \tag{8.3.8}$$

である．ここで (8.3.7) の第 1 項で（　　）の中の D を部分積分のように $[L]_i g^i_{\alpha 1}$ に移すと

$$I = \epsilon^\alpha\left\{[L]_i g^i_{\alpha 0} - D\left([L[_i g^i_{\alpha 1}\right)\right\} + D\left\{\epsilon^\alpha \Psi_{\alpha 0} + D\epsilon^\alpha \cdot \Psi_{\alpha 1} + \epsilon^\alpha [L]_i g^i_{\alpha 1}\right\} \tag{8.3.9}$$

となる．ラグランジュ関数は準不変ゆえ，作用積分の変分から

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt I \equiv 0 \tag{8.3.10}$$

をえる．ここで，$\epsilon^\alpha(t)$ は任意関数であるから，積分の境界 t_1, t_2 において，

$$\epsilon^\alpha(t_1) = \epsilon^\alpha(t_2) = 0, \quad D\epsilon^\alpha(t_1) = D\epsilon^\alpha(t_2) = 0$$

となるように選ぶことができる．すると，(8.3.9) を (8.3.10) に代入した式の第 2 項 $D\{\cdots\}$ は積分できて，境界 t_1, t_2 の値で表されるからゼロとなり，第 1 項のみ残る．その残った式で，積分領域 $[t_1, t_2]$ は任意であり，かつ ϵ^α は α ごとに独立にとれるので，次の恒等式をえる．

$$[L]_i g^i_{\alpha 0} - D\left([L]_i g^i_{\alpha 1}\right) \equiv 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{8.3.11}$$

これを (8.3.9) に適用すると，今度は第 2 項が 0 となる；

$$D\left\{\epsilon^\alpha\left(\Psi_{\alpha 0} + [L]_i g^i_{\alpha 1}\right) + D\epsilon^\alpha \cdot \Psi_{\alpha 1}\right\} \equiv 0 \tag{8.3.12}$$

ここで再び，ϵ^α が任意関数であることを考慮すると，(8.3.12) の $\epsilon^\alpha, D\epsilon^\alpha$ および $D^2\epsilon^\alpha$ の各因子は消えねばならない．よって

$$D\left(\Psi_{\alpha 0} + [L]_i g^i_{\alpha 1}\right) \equiv 0, \tag{8.3.13}$$

$$\Psi_{\alpha 0} + D\Psi_{\alpha 1} + [L]_i g^i_{\alpha 1} \equiv 0, \tag{8.3.14}$$

$$\Psi_{\alpha 1} \equiv 0, \tag{8.3.15}$$

をえる．さらに (8.3.11) と (8.3.13) とから

$$D\Psi_{\alpha 0} + [L]_i g^i_{\alpha 0} \equiv 0 \tag{8.3.16}$$

をえる．

これら恒等式 (8.3.13)∼(8.3.16) が，ゲージ変換 (8.3.3) のもとで L が準不変であるときの結果である*)．

次に，これら恒等式から $\Psi_{\alpha k}$ が拘束条件であり，その 1 次結合によってゲージ変換 (8.3.3) の生成母関数が構成されることを示す．

まず，(8.3.14) で，$\Psi_{\alpha k}$ は (8.3.8) から明らかなように，$\ddot{q}^i$ によらず $q^i, \dot{q}^i$ のみの関数である（$g^i_{\alpha k}$ と $f_{\alpha k}$ が $\ddot{q}^i$ をふくまないから）．したがって，(8.3.14) において $\Psi_{\alpha 1}$ は 0 であるから，$\ddot{q}^i$ は $[L]_i$ のみに含まれる．すなわち (8.3.5) から

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial p_i}{\partial q^i}\dot{q}^j - A_{ij}\ddot{q}^j, \quad \left(A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{8.3.17}$$

注*）これら恒等式は速度位相空間で導かれたものであることに注意すべきである．(8.3.15) のゆえに，(8.3.14) の $D\Psi_{\alpha 1}$ は消え，そして (8.3.13) は自動的に満されることになる．しかし，$q, \dot{q} = \xi$ でなく，q, p で表される位相空間では $\Psi_{1\alpha}(q, p)$ は恒等的にゼロでなく，1 次拘束条件となるので，(8.3.14) の $D\Psi_{\alpha 1}$ は残しておくのである．

A_{ij} はヘシアン行列である．すると恒等式 (8.3.14) の $\ddot{q}^j$ の因子は恒等的に消えねばならないから

$$A_{ij} g^i_{\alpha 1} \equiv 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{8.3.18}$$

この式は $g^i_{\alpha 1}$ がゼロ固有値ベクトルであることを示しており，行列 A_{ij} の階数は，他に第２類拘束条件がなければ，$N - R$ である．$g^i_{\alpha 1}$ はすべての α について独立なベクトルであると仮定する*⁾．よって，L は非正則であり，R 個の１次拘束条件

$$_*\Phi^1_\alpha(q, p) = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{8.3.19}$$

が存在し，しかも (8.2.75) により

$$g^i_{\alpha 1} = \left. \frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{\partial p_i} \right|_{p = p(q, \dot{q})} = \tau^i_\alpha \tag{8.3.20}$$

である．

１次拘束条件の $_*\Phi^1_\alpha(q, p)$ は (8.3.15) の $\Psi_{\alpha 1}(q, \dot{q}) \equiv 0$ を位相空間に移したものである．なぜならば，１次拘束は速度位相空間では消えるからである．

$$\therefore \quad {}_*\Phi^1_\alpha = {}_*\Psi_{\alpha 1}(q, p) \tag{8.3.21}$$

(8.3.14) の第３項は (8.3.18) のために

$$[L]_i g^i_{\alpha 1} = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial p_i}{\partial q^j} \dot{q}^j \right) g^i_{\alpha 1} \tag{8.3.22}$$

となるが，これはラグランジュ方程式に $g^i_{\alpha 1} = \tau^i_\alpha$ を乗じて $\ddot{q}^i$ を除去した式であるから，(5.2.24) でえた拘束条件 Φ_α に他ならない．(8.3.14) は (8.3.15) により

$$\Psi_{\alpha 0} = -[L]_i g^i_{\alpha 1} \tag{8.3.23}$$

となるから，運動方程式のもとで拘束条件を与える．

よって，$\Psi_{\alpha 0}$ は運動方程式のもとで得られた拘束条件であるから２次拘束である；

$$\Phi^2_\alpha \equiv -\Psi_{\alpha 0} = [L]_i g^i_{\alpha 1} = 0 \tag{8.3.24}$$

注＊）この仮定は次に示すように１次拘束条件 $_*\Phi^1_\alpha$ の独立性と同等である．

この Φ^2_α は 2 次拘束条件であり，${}_*\Phi^1_\alpha$ の定常条件 ${}_*\dot{\Phi}^1_\alpha = 0$ から導かれることを示そう．(8.3.14) により，運動方程式 $[L]_i = 0$ のもとで，(8.3.15) を考慮すると

$$D\Psi_{\alpha 1} = -\left.\Psi_{\alpha 0}\right|_{[L]=0} = 0 \tag{8.3.25}$$

となる．よって，$\Psi_{\alpha 0}$ は 1 次拘束 ${}_*\Phi^1_\alpha = {}_*\Psi_{\alpha 1}$ の定常条件より導かれる拘束条件であるから，2 次拘束であり，(8.3.24) とおける．これ以上拘束条件が現れないことは (8.3.16) により $\left.D\Psi_{\alpha 0}\right|_{[L]} = 0$ からわかる．

これらの結果を位相空間でまとめると

$${}_*\Phi^1_\alpha(q,p) = {}_*\Psi_{\alpha 1}(q,p) = 0, \tag{8.3.26}$$

$${}_*\Phi^2_\alpha(q,p) = -{}_*\Psi_{\alpha 0} = D{}_*\Phi^1_\alpha = \left\{{}_*\Phi^1_\alpha, H\right\} = 0^{*)}, \tag{8.3.27}$$

$$\left.D{}_*\Phi^2_\alpha\right| = \left\{{}_*\Phi^2_\alpha, H\right\} = 0. \tag{8.3.28}$$

ここで，次のように G を定義しよう；

$$G = \epsilon^\alpha \Psi_{\alpha 0} + D\epsilon^\alpha \cdot \Psi_{\alpha 1} = -\epsilon^\alpha{}_*\Phi^2_\alpha + \dot{\epsilon}^\alpha{}_*\Phi^1_\alpha. \tag{8.3.29}$$

すると，(8.3.3), (8.3.6) および (8.3.8) より

$$G = \epsilon^\alpha \left(p_i g^i_{\alpha 0} - f_{\alpha 0}\right) + \dot{\epsilon}^\alpha \left(p_i g^i_{\alpha 1} - f_{\alpha 1}\right) = p_i \delta q^i - F \tag{8.3.30}$$

となる．この式はゲージ変換の母関数 G の満すべき条件なのである．

L がゲージ変換で不変，つまり $F = 0$ の場合は，上式の G がゲージ変換の母関数

$$\delta q^i = \left.\frac{\partial_* G(q,p)}{\partial p_i}\right|_{p=p(q,\dot{q})} \tag{8.3.31}$$

であることは，容易にわかる（その場合 δq^i は $\dot{q}$ によらない）．ところが，L が準不変のとき ($F \neq 0$)，(8.3.31) によって与えられるゲージ変換において，G は (8.3.30) すなわち

$$p_i \frac{\partial_* G}{\partial p_i} - G = F \tag{8.3.32}$$

を満すのである．以下にそれを示す．その際に，(8.3.31) を用い，そして $\delta\dot{q}^i = D\delta q^i$ とする．

注＊）(8.3.27) の最右辺はハミルトン方程式を用いて $\dot{p}_i$ を q^i, p_i で表すことに対応している．H_T でなく H を用いたのは，$[L]_i = 0$ には未定関数 v^α が現れないので，$\ddot{q}^i$ の消去には 1 次拘束は関係ないからである．

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i = p_i D\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i$$
$$= D\left(p_i \delta q^i\right) - \left(\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\right)\frac{\partial_* G}{\partial p_i}$$
$$= D\left(p_i \delta q^i - *G\right) + \frac{\partial_* G}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial_* G}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial_* G}{\partial p_i} \tag{8.3.33}$$

と書ける．この式を位相空間の表式とみるために，(2.2.3) からえられる

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{{}_*\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{8.3.34}$$

を用いる．すると

$$\delta L = D\left(p_i \frac{\partial_* G}{\partial p_i} - {}_*G\right) + \frac{\partial_* G}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial_* G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial_* G}{\partial t}$$
$$= D\left(p_i \frac{\partial_* G}{\partial p_i} - {}_*G\right) + \{{}_*G, H\} + \frac{\partial_* G}{\partial t} = D\left(p_i \frac{\partial_* G}{\partial p_i} - {}_*G\right) - \epsilon_0^\alpha {}_*\Phi_\alpha^1 \tag{8.3.35}$$

となる．上式で (8.2.22) を用いた．ここで，再び速度位相空間にもどると，$\Phi_\alpha^1 \equiv 0$ であるから

$$\delta L = D\left(p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} - G\right) \tag{8.3.36}$$

したがって，L は (8.3.31) の変換に対して準不変であることが示せた．さらに，ラグランジュ方程式を導くときにえた式

$$\delta L = D\left(p_i \delta q^i\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i \tag{8.3.37}$$

と (8.3.36) を比較すれば，運動方程式のもとでは，

$$\frac{dG}{dt} \equiv DG = 0 \tag{8.3.38}$$

となる．よって G は保存量である．

L が準不変のとき $\delta L = DF$ とおいて，(8.3.36) より (8.3.32) をえる．このように，(8.3.32) を満す G はゲージ変換 (8.3.31) を与えることが証明された．また，これで G は必ず拘束条件の 1 次結合で表されることも示せたわけである．

(8.3.32) からわかることは，${}_*G$ が p_i の斉 1 次式のとき，つまり δq^i が q のみに依存して $\dot{q} = \xi$ を含まぬときのみ $F = 0$ である．特に，${}_*G$ が p_i の 2 次より高次の項を有するとき $F \neq 0$ で，速度位相空間と位相空間との間の互換で問題が起る（後述）．

最後に残された問題は，こうしてえられた拘束条件 $\Phi_\alpha^1, \Phi_\alpha^2$ は第 1 類拘束であることの証明である．その証明には，微小ゲージ変換を 2 度続けて行ったものは，1 回のゲージ変換で表されるという事実を用いる．いま，ゲージ関数 ϵ_1^α と ϵ_2^α で表現される母関数を $G(\epsilon_1)$ および $G(\epsilon_2)$ とする．$G(\epsilon_a)(a=1,2)$ によるゲージ変換で

$$\delta_a L = DF_a \quad (a=1,2) \tag{8.3.39}$$

となったとしよう．これを 2 回重ねてもやはり L は準不変になるから

$$\delta_2(\delta_1 L) = DF_{12} \tag{8.3.40}$$

と表される．それゆえ，$\delta_2 \cdot \delta_1$ と $\delta_1 \cdot \delta_2$ はともに 1 つのゲージ変換である．よって

$$(\delta_1 \cdot \delta_2 - \delta_2 \cdot \delta_1)L = \delta_3 L = DF_3 \tag{8.3.41}$$

と表しうる*)．$G(\epsilon)$ によるゲージ変換は (8.2.8) により

$$_*X_{G(\epsilon)}L = \{L, {}_*G(\epsilon)\} \tag{8.3.42}$$

である．したがって，(8.3.41) と (8.3.42) より

$$\{{}_*G(\epsilon_1), {}_*G(\epsilon_2)\} = {}_*G(\epsilon_3) \tag{8.3.43}$$

をえる．そえゆえ，${}_*G(\epsilon_3)$ もゲージ変換の母関数であるから，${}_*\Phi_\alpha^1$ と ${}_*\Phi_\alpha^2$ の 1 次結合で与えられることになる．もし，G の中の ${}_*\Phi_\alpha^1, {}_*\Phi_\alpha^2$ に第 2 類拘束が入っていれば $G(\epsilon_3)$ は拘束条件のみでは表されないことになり矛盾する．よって，${}_*\Phi_\alpha^1, {}_*\Phi_\alpha^2$ は第 1 類拘束でなければならない．

これで G の満すべき定常条件 (8.2.22), (8.2.23) の解は必ず存在することが示されたことになる．

ただし，ここで δq^i の表式 (8.3.3) と G の表式 (8.3.29) に関連して，Φ_α^k の定義に言及しておく必要がある．G の定常条件の一つ (8.2.27) と例題 8.4 で指摘したように，$\epsilon_K^\alpha \equiv \epsilon^\alpha$ は t のみの関数でなく，q^i, p_i を含まなければ解が存在しない場合がある．そのような場合には ${}_*\Phi_\alpha^k$ の係数因子に $\epsilon^\alpha(t)$ のみでなく q, p の関数が現われるので，(8.3.29) のように単純には書けない．しかし，その場合でも微小ゲージ変換の

注＊）このような性質を有する変換は群をつくるといい，それを変換群という．

母関数 G は必ず (8.3.29) のような形式に書きなおせるのである．なぜならば，拘束条件には 1 次結合の任意性があるから，$\epsilon^\alpha(t)$ とともに現われる q, p の関数を係数因子に繰り込んで，${}_*\Phi^k_\alpha$ の 1 次結合 ${}_*\bar{\Phi}^k_\alpha$ をつくり，改めて第 1 類拘束と定義し直せば

$$G = -\epsilon^\alpha_* \bar{\Phi}^2_\alpha + \dot{\epsilon}_* \bar{\Phi}^1_\alpha \tag{8.3.44}$$

と表される．（例題 8.4 では $(q)^2_* \Phi^1 \equiv {}_*\bar{\Phi}^1$ を第 1 類拘束とすればよい．）

これで $K = 2$ の特殊な場合の証明が終った．

Φ^K_α の K が任意の一般論

K が任意の場合のゲージ変換は (8.3.1) によって表される．この変換によって L の変分は (8.3.2) であるが，これに (8.3.1) を代入して，$K = 2$ の場合と同様の手続きに従って G を求めればよいので，説明を簡略化して話を進める．

$$\delta L \equiv [L]_i \delta q^i + D\left(p_i \delta q^i\right) = DF \tag{8.3.45}$$

の F は δq^i と同じく $\overset{(K-1)}{\epsilon^\alpha}(t) = D^{K-1}\epsilon^\alpha(t)$ まで含む；

$$F = \left(D^k \epsilon^\alpha(t)\right) f_{\alpha k}\left(q, \dot{q}\right), \quad (k = 0 \sim K-1) \tag{8.3.46}$$

そして，(8.3.1)，(8.3.45)，および (8.3.46) から

$$I \equiv \delta L - DF = [L]_i \left(D^k \epsilon^\alpha\right) g^i_{\alpha k} + D\left[\left(D^k \epsilon^\alpha\right) \Psi_{\alpha k}\right] \tag{8.3.47}$$

となる．ここに

$$\Psi_{\alpha k} \equiv p_i g^i_{\alpha k} - f_{\alpha k} \tag{8.3.48}$$

(8.3.47) の右辺の第 1 項の D^k を部分積分のように $[L]_i g^i_{\alpha k}$ に逐次移すと

$$\begin{aligned} I = &\sum_{k=0}^{K-1} (-1)^k \epsilon^\alpha D^k \left([L]_i g^i_{\alpha k}\right) \\ &+ \sum_{k=0}^{K-1} D\left\{\left(D^k \epsilon^\alpha\right) \Psi_{\alpha k} - \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \left(D^{k-s}\epsilon^\alpha\right) D^{s-1}\left([L]_i g^i_{\alpha k}\right)\right\} \end{aligned} \tag{8.3.49}$$

となる．(8.3.10) の積分の境界 t_1, t_2 において，すべての k に対して

$$D^k \epsilon^\alpha(t_1) = D^k \epsilon^\alpha(t_2) = 0 \tag{8.3.50}$$

となるように ϵ^α を選べるから，(8.3.49) の第 2 項 $\{\quad\}$ の中は消えて，第 1 項のみ残る．その式で積分領域 $[t_1, t_2]$ は任意であるから，次の恒等式をえる；

$$\sum_{k=0}^{K-1}(-1)^k D^k\left([L]_i g_{\alpha k}^i\right) \equiv 0 \tag{8.3.51}$$

この式を (8.3.49) に代入すると，第 2 項がゼロとなる．

$$\sum_{k=0}^{K-1} D\left\{\left(D^k\epsilon^\alpha\right)\Psi_{\alpha k} - \sum_{s=1}^{k}(-1)^s\left(D^{k-s}\epsilon^\alpha\right)D^{s-1}\left([L]_i g_{\alpha k}^i\right)\right\} \equiv 0 \tag{8.3.52}$$

ここで再び ϵ^α が任意関数であることを考慮すると，$D^k\epsilon^\alpha$ のすべての k について，それぞれの係数が恒等的にゼロでなければならないことになる．よって

$$\Psi_{\alpha K-1} \equiv 0, \tag{8.3.53}$$

$$\Psi_{\alpha k} + D\Psi_{\alpha k+1} + [L]_i g_{\alpha k+1}^i \equiv 0, \quad (k = 0 \sim K-2), \tag{8.3.54}$$

$$D\Psi_{\alpha 0} - \sum_{k=1}^{K-1}(-1)^k D^k\left([L]_i g_{\alpha k}^i\right) \equiv 0 \tag{8.3.55}$$

をえる．さらに (8.3.51) を用いると (8.3.55) は

$$D\Psi_{\alpha 0} + [L]_i g_{\alpha 0}^i \equiv 0 \tag{8.3.56}$$

となる．

ここで (8.3.54) で $k = K-2$ とおくと，(8.3.53) により

$$\Psi_{\alpha K-2} + [L]_i g_{\alpha K-1}^i \equiv 0 \tag{8.3.57}$$

この式で，$\Psi_{\alpha K-2}$ と $g_{\alpha K-1}^i$ はその定義から q^i と $\dot{q}^i$ のみの関数であるから，$\ddot{q}$ は $[L]_i$ だけに含まれる．よって，(8.3.18) と同じく

$$A_{ij} g_{\alpha K-1}^j \equiv 0 \tag{8.3.58}$$

そして，

$$g_{\alpha K-1}^i = \left.\frac{\partial_* \Phi_\alpha^1}{\partial p_i}\right|_{p=p(q,\dot{q})} = \tau_\alpha^i \tag{8.3.59}$$

をえる．

すると，

$$[L]_i g^i_{\alpha K-1} = \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\dot{q}^j\right) g^i_{\alpha K-1} = 0 \tag{8.3.60}$$

はラグランジュ方程式から $\ddot{q}^i$ を除去したものであるから，２次拘束条件 ${}_*\Phi^2_\alpha$ である．よって，(8.3.57) より，２次拘束は

$$\Phi^2_\alpha = -\Psi_{\alpha K-2} = [L]_i g^i_{\alpha K-1} = 0 \tag{8.3.61}$$

である．次に，(8.3.54) で $k = K-3$ とおいた式

$$\Psi_{\alpha K-3} - D\Phi^2_\alpha + [L]_i g^i_{\alpha K-2} \equiv 0 \tag{8.3.62}$$

で，$D\Phi^2_\alpha$ の中の $\ddot{q}^i$ を $[L]_i = 0$ を用いて消去すれば，３次拘束

$$\Phi^3_\alpha \equiv D\Phi^2_\alpha\big|_{[L]=0} = \Psi_{\alpha K-3} \tag{8.3.63}$$

をえる．

以下同様に，逐次

$$\Phi^{k+1}_\alpha \equiv D\Phi^k_\alpha\big|_{[L]=0} \tag{8.3.64}$$

とおくことにより拘束条件の列

$$\Phi^k_\alpha = (-1)^{k+1}\Psi_{\alpha K-k} = 0, \quad (k = 1 \sim K) \tag{8.3.65}$$

をえる．最後に，(8.3.64)，(8.3.65) および (8.3.56) より

$$D\Psi_{\alpha 0} = D\Phi^K_\alpha = 0 \tag{8.3.66}$$

となる．こうして，(8.3.64)，(8.3.65) は Φ^k_α の定常条件を要請することにより，次々に Φ^{k+1}_α を定義するが，(8.3.66) はこの拘束条件の列は Φ^K_α で終ることを示している．

以上はラグランジュ形式（速度位相空間 $q^i, \dot{q}^i = \xi^i$）における定式化であるが，これを位相空間 $\left(q^i, p_i\right)$ に変換して，ゲージ変換の母関数 G を求めることができる．

$\Psi_{\alpha K-1}$ は (8.3.53) により恒等的にゼロであるから，位相空間での１次拘束 ${}_*\Phi^1_\alpha$ である．実際に，$k = K-2$ のときの (8.3.54) は位相空間で

$${}_*\Phi^2_\alpha(q,p) = D\Psi_{\alpha K-1}(q,p)\big|_{[L]=0} = \{\Psi_{\alpha K-1}, H\} \tag{8.3.67}$$

と表される．上式の最右辺は，ハミルトン方程式を用いて，$\dot{p}_i$ を q^i, p_i で表すことに対応する．それを，まとめると

$$ {}_*\Phi^1_\alpha(q,p) = {}_*\Psi_{\alpha K-1} \approx 0, \quad {}_*\Phi^k_\alpha = (-1)^{k+1}{}_*\Psi_{\alpha K-k} \tag{8.3.68} $$

$$ {}_*\Phi^{k+1}_\alpha(q,p) = \left\{{}_*\Phi^k_\alpha, H\right\} \approx 0, \quad (k = 1 \sim K-1) \tag{8.3.69} $$

および

$$ \left\{{}_*\Phi^K_\alpha, H\right\} \approx 0 \tag{8.3.70} $$

となる．そして，母関数 ${}_*G$ は

$$ {}_*G \equiv \sum_{k=0}^{K-1} \left(D^k \epsilon^\alpha\right) \Psi_{\alpha k} = \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^{K-k+1} \left(D^k \epsilon^\alpha\right) {}_*\Phi^{K-k}_\alpha \tag{8.3.71} $$

であたえられる．

この ${}_*G$ を用いて，ゲージ変換は

$$ \delta q^i = \left\{q^i, {}_*G\right\} = \frac{\partial_* G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = \{p_i, {}_*G\} = -\frac{\partial_* G}{\partial p_i} \tag{8.3.72} $$

であたえられ，(8.3.32) と同様に，L が準不変のとき

$$ G = p_i \delta q^i - F = p_i \frac{\partial_* G}{\partial p^i} - F \tag{8.3.73} $$

を満す．

最後に，Φ^k_α はすべて第 1 類拘束であることは，$K = 2$ の場合と同様，(8.3.43) が成り立つからである．これで，一般のゲージ変換も，第 1 類拘束の 1 次結合で表せることが証明された．

ゲージ変換の母関数と第 1 類拘束条件について，以上の説明をまとめると，

(1) ゲージ自由度は第 1 類 1 次拘束条件 $\boldsymbol{\Phi^1_\alpha}$ の数 $\boldsymbol{R}$ である．

(2) 微小ゲージ変換の母関数 $\boldsymbol{G}$ は，ゲージ自由度ごとに第 1 類拘束条件 $\boldsymbol{\Phi^k_\alpha (k = 1 \sim K)}$ の 1 次結合で構成される．

(3) 最高が $\boldsymbol{K}$ 次拘束のとき，微小ゲージ変換 $\boldsymbol{\delta q^i}$ には微小ゲージ関数 $\boldsymbol{\epsilon^\alpha}$ の時間微分は $\boldsymbol{K-1}$ 階 $\boldsymbol{D^{K-1}\epsilon^\alpha}$ まで含まれる．

(4) 母関数 $\boldsymbol{G}$ は定常条件 (8.2.22)，(8.2.23) を満すから，保存量である．

8.4 第２類拘束条件と大域的変換

第１類のみでなく第２類拘束条件の現れる力学系の対称性を考察しよう．ディラックが指摘したように，第２類拘束は通常はその力学系の自由度を縮減する役目をするだけで，力学的には余り興味がないとみなされている．それゆえ，7.1 節で述べたように，ディラック括弧を用いて第２類拘束条件を強い拘束条件にして自由度を落す方法がとられ，それ以上の考察はなかった．

しかし，本節で示すように，**第２類拘束条件の中には，それらの１次結合が大域的対称性を表す変換（定数パラメーターを係数にもつ微小変換）の生成母関数となるものがある．それゆえ，第２類拘束は力学系の自由度を制限するばかりでなく，その系の大域的対称性と結びついていて，物理的に重要な意味をもつことがある** (6)．

そこで，第１類と第２類拘束をできるだけ同列に扱って，変換の生成母関数を構成するときに，両者を混みにしてすべての拘束条件の１次結合をつくり，その係数を決定する方法を与えよう．その結果，第１類拘束の列は任意関数 ϵ^α を含むゲージ変換を与え，第２類拘束の列は定数パラメーター η^s を含む大域的変換を与えるように分離することを示す．したがって，この節ではディラック括弧は用いない．

まず，自由度 N の系の拘束条件の系列を，第１類と第２類に分けて，次のように表すことにする．

$$\text{第１類拘束}:\Phi_\alpha^k(\alpha = 1 \sim R,\ k = 1 \sim K),$$
$$\text{第２類拘束}:\Phi_s^m(s = 1 \sim S,\ m = 1 \sim M)$$

すると，全ハミルトン関数は，これまで通り１次拘束を用いて

$$H_T = H + v^\alpha{}_*\Phi_\alpha^1 + v^s{}_*\Phi_s^1 \tag{8.4.1}$$

となる．この H_T の中の v^s は，7.1 節の (7.1.34) で求めたように次式で与えられる．

$$v^s(q,p) = -C^{s\sigma}\{\theta_\sigma, H\}, \quad C_{\sigma\tau} = \{\theta_\sigma, \theta_\tau\}. \tag{8.4.2}$$

ただし，θ_σ は第２類拘束 Φ_s^m 全部を一まとめにして表したものである．q, p の関数として定まった v^s と不定のままの v^α（第１類拘束の係数）とに分けて，H_T を

$$H_T^* = H^* + v^\alpha{}_*\Phi_\alpha^1, \tag{8.4.3}$$
$$H^* = H + v^s\Phi_s^1 \tag{8.4.4}$$

と表すことにする．この H^* は 7.1 節で説明したように，すべての拘束条件とのポアソン括弧は ≈ 0 である．それゆえ，高次拘束条件の定義は H_T^* で行うよりも，H^* でした方が簡単になる．こうしても，拘束条件の組は全体として変らない．

一般化された変換の母関数を構成するために，高次拘束条件の列を H^* を用いて改めて次のように定義し直す．すると，第 1 類と第 2 類拘束条件の系列は分離して，綺麗にまとめ易くなる．

$$
{}_*\Phi_\alpha^{k+1} = {}_*\dot{\Phi}_\alpha^k = \left\{{}_*\Phi_\alpha^k, H^*\right\}, \quad \left\{{}_*\Phi_\alpha^K, H^*\right\} = C_{\alpha k *}^{\beta}\Phi_\beta^k, \tag{8.4.5}
$$

$$
{}_*\Phi_s^{m+1} = {}_*\dot{\Phi}_s^m = \left\{{}_*\Phi_s^m, H^*\right\}, \quad \left\{{}_*\Phi_s^M, H^*\right\} = C_{sm*}^{t}\Phi_t^m \tag{8.4.6}
$$

こうすると，H^* は第 1 類関数であるから，第 1 類同士のポアソン括弧は第 1 類となること（7.1 節参照）を考慮すると，H^* の決め方からして，上式の系列では第 1 類と第 2 類拘束列は分離するのである*⁾．

これで準備ができたので，無限小ゲージ変換の G にならって，これら全拘束条件の 1 次結合をつくる；

$$
\tilde{G} = \epsilon_{k*}^{\alpha}\Phi_\alpha^k + \eta_{m*}^{s}\Phi_s^m \tag{8.4.7}
$$

$\tilde{G}$ の定常条件

$$
\dot{\tilde{G}} = \frac{\partial\tilde{G}}{\partial t} + \left\{\tilde{G}, H_T^*\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) \tag{8.4.8}
$$

は H_T^* の中の v^α が任意であるから，２つに分解され

$$
\frac{\partial\tilde{G}}{\partial t} + \left\{\tilde{G}, H^*\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) \tag{8.4.9}
$$

$$
\left\{\tilde{G}, {}_*\Phi_\alpha^1\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) \tag{8.4.10}
$$

となる．そして，無限小変換

$$
\delta q^i = \left\{q^i, \tilde{G}\right\}, \quad \delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\delta q^i = \frac{d}{dt}\left\{q^i, \tilde{G}\right\} \tag{8.4.11}
$$

によってラグランジュ関数 L が準不変であるとする；

$$
\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}F \tag{8.4.12}
$$

注＊）(8.4.6) の系列に第 1 類が現れないことは，(8.4.2) の v^s の表式を用いて $\{\theta_\sigma, H^*\}$ を計算すると，$\{\theta_\sigma, v^s\}{}_*\Phi_s^1$ となることからわかる．ただし，$(\theta_\sigma)^2$ は第 1 類となるから，このような場合はないとする．

この条件を満すように，$\tilde{G}$ の ϵ_k^α と η_m^s を (8.4.9) と (8.4.10) の解として決定するのである．

これまでの経過からわかるように，第1類拘束と第2類拘束は一応分離できて，第1類拘束条件についてはすでに考察が終ったので，これ以降は話を単純にするため第2類拘束のみ存在する力学系を扱い，大域的変換の母関数を求めることにする．そうしても定式化の本質的な筋道は変らない．

第2類拘束条件の系列は (8.4.6) で与えられている．そして，(8.4.3) の H_T^* は ${}_*\Phi_\alpha^1$ がないとしたので $H_T^* = H^*$ となる．${}_*\Phi_s^m$ の1次結合

$$\bar{G}(\eta) = \eta_m^s {}_*\Phi_s^m \tag{8.4.13}$$

をつくる．η_m^s は無限小パラメータである．$\bar{G}$ の定常条件は

$$\dot{\bar{G}} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + \left\{\bar{G}, H^*\right\} \equiv 0 \mod \left(\Phi_s^1\right) \tag{8.4.14}$$

H^* の中の v^s は q, p の関数として決まっているので (8.4.10) に相当する式はない．この $\bar{G}$ によって生成される無限小変換

$$\delta q^i = \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_i} = \left\{q^i, \bar{G}\right\}, \quad \delta \dot{q}^i = \frac{d}{dt}\delta q^i \tag{8.4.15}$$

によって，ラグランジュ関数 L が準不変であるとしよう；

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i = \frac{d\bar{F}}{dt} \tag{8.4.16}$$

この式を満足するように，$\bar{G}$ の η_m^s を (8.4.14) の解として決定するのである．

そのために次のようなハミルトン関数を導入しよう；

$$\bar{H}\left(q, p, \dot{q}^s\right) \equiv p_i \dot{q}^i - L\left(q, \dot{q}\right) = p_s \dot{q}^s + p_u \dot{q}^u - L\left(q, \dot{q}^s, \dot{q}^u\right) \tag{8.4.17}$$

この $\bar{H}$ の意味をまず説明する．（なぜこのような $\bar{H}$ を必要とするのか，その理由は後に明らかになる.）運動量の定義

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

において，ヘシアン行列 A_{ij} の階数が $N-S$ なので，上式の p_i のうちの最後の $N-S$ 個の式 $(i = S+1 \sim N)$ $p_u = \partial L/\partial \dot{q}^u$ を $\dot{q}^u$ についてとくことができるとしてよい．

$$\dot{q}^u = g^u\left(q^i, p_w, \dot{q}^s\right), \quad (u, w = S+1 \sim N;\ s = 1 \sim S). \tag{8.4.18}$$

ここで $\dot{q}^s$ は不定なので，(8.4.17) において $\dot{q}^i$ を q, p で表すとき，$\dot{q}^s$ はそのまま残し，それ以外の $\dot{q}^u$ を (8.4.18) を用いて消去したものが $\bar{H}$ である．よって，$\bar{H}$ は (8.4.16) の δL を与える δq^i を求めるための補助手段として用いるのであって，運動の生成子としてのハミルトン関数は H^* である．

このように定義された $\bar{H}$ の変分は

$$\delta\bar{H} = \dot{q}^i\delta p_i + p_i\delta\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta\dot{q}^i \tag{8.4.19}$$

この式で $p_s(s = 1 \sim S)$ 以外の $p_u(u = S+1 \sim N)$ は $\partial L/\partial\dot{q}^u$ であるから $i = u$ の第 2 項と第 4 項は打ち消すが，$\dot{q}^s$ は $\dot{q}^u$ にも含まれるので残る．よって

$$\delta\bar{H} = \dot{q}^i\delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \left(p_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}\right)\delta\dot{q}^s \tag{8.4.20}$$

となる．ここで不定変数 $\delta\dot{q}^s$ の係数因子を

$$\Phi_s^1 \equiv p_s - \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}\right|_{\dot{q}^u = g^u} = p_s - \Psi_s(q^i, p_u) \tag{8.4.21}$$

とおく．

ところで重要なことは上式の Ψ_s が $\dot{q}^s$ によらないということである．そのとき Φ_s^1 は 1 次拘束となるからである．そこで Ψ_s が $\dot{q}^s$ によらぬことを証明しよう．(8.4.18) は $p_u = \partial L/\partial\dot{q}^u$ と同等であるから

$$\Psi_s\left(q^i, p_u\right) = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}\right|_{p_u = \partial L/\partial\dot{q}^u} \tag{8.4.22}$$

とも表される．

ここで次の恒等式を考えよう；

$$p_u = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^u}\right|_{\dot{q}^u = g^u}, \quad (u = S+1 \sim N) \tag{8.4.23}$$

は p_u の定義式を $\dot{q}^u$ について解いたものを，再び p_u の定義式に代入したものであるから恒等式である．それゆえ，この式を $\dot{q}^s$ で微分したものは当然ゼロである．

$$\therefore \quad \frac{\partial p_u}{\partial \dot{q}^s} + \frac{\partial p_u}{\partial \dot{q}^w}\frac{\partial g^w}{\partial \dot{q}^s} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s\partial \dot{q}^u} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^u\partial \dot{q}^w}\frac{\partial g^w}{\partial \dot{q}^s} = A_{us} + A_{uw}\frac{\partial g^w}{\partial \dot{q}^s} = 0 \tag{8.4.24}$$

$$(s = 1 \sim S;\ \ u, w = S+1 \sim N)$$

他方，

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial \dot{q}^s} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^s}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^t}\right|_{\dot{q}u=gu}\right) = A_{tu}\frac{\partial g^u}{\partial \dot{q}^s} + A_{ts}, \quad (t = 1 \sim S) \tag{8.4.25}$$

である．しかるに，A_{ij} の階数は $N-S$ であるから，S 個の A_{ij} のゼロ固有値ベクトル τ_s^i が存在する．したがって，

$$A_{ij}\tau_s^j = A_{iu}\tau_s^u + A_{it}\tau_s^t = 0 \tag{8.4.26}$$

また

$$det(A_{uw}) \neq 0 \quad \text{ゆえ} \quad det(\tau_s^t) \neq 0 \tag{8.4.27}$$

なる τ_s^t が存在する．なぜならば，対称行列 A_{ij} を対角化するとゼロ固有値の部分は $A_{st}=0$ となるからである．よって，(8.4.26) に $\left(\tau^{-1}\right)_t^s$ を乗じて

$$A_{it} = -A_{iu}\tau_s^u\left(\tau^{-1}\right)_t^s \equiv A_{iu}B_t^u, \tag{8.4.28}$$

あるいは

$$A_{ti} = C_t^u A_{ui} \quad \left(C \equiv B^T\right) \tag{8.4.29}$$

をえる．この表式を用いると，(8.4.25) は (8.4.24) のゆえにゼロになる；

$$\frac{\partial \Psi_t}{\partial \dot{q}^s} = C_t^u\left(A_{uw}\frac{\partial g^w}{\partial \dot{q}^s} + A_{us}\right) = 0 \tag{8.4.30}$$

これで Ψ_t が $\dot{q}^s$ によらないことが証明された．

こうして (8.4.21) により，Φ_s^1 は 1 次拘束であることがわかった．そして，(8.4.20) の $\delta\bar{H}$ の式から

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial \bar{H}}{{}_*\partial q^i}, \quad \Phi_s^1 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \dot{q}^s} \tag{8.4.31}$$

をえる．

ここで留意すべきことは，H^*（第 1 類拘束もあるときは H_T^*）は (8.4.31) を満さないことである．なぜなら，H^* の中の v^s が ${}_*\Phi_s^k$ の定常条件によって，(8.4.2) のように q, p の関数として決定されているからである．

こうして (8.4.17) と (8.4.21) より

$$\bar{H} = H + \dot{q}^s{}_*\Phi_s^1, \tag{8.4.32}$$

$${}_*\Phi_s^1 = p_s - \Psi_s(q,p) \tag{8.4.33}$$

をえる（H の実例は例題 2.2 の H）．H の代りに (8.4.4) の H^* を用いると

$$\bar{H} = H^* + \dot{q}^s_* \Phi^1_s - v^s_* \Phi^1_s = H^* + (\dot{q}^s - v^s)_* \Phi^1_s \tag{8.4.34}$$

となる．この v^s はすでに定まった関数であることに注意．これで $\bar{G}$ を定める準備ができた．

L の変分は 8.3 節の (8.3.33) の計算と同様にやれるが，(8.3.31) や (8.3.34) の代りに (8.4.15) と (8.4.31) を用いる．すると

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(p_i \delta q^i - \bar{G}\right) + \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} + \left\{\bar{G}, \bar{H}\right\} \tag{8.4.35}$$

さらに $\bar{G}$ の定常条件 (8.4.14) と $\bar{H}$ の表式 (8.4.34) により

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_i} - \bar{G}\right) + (\dot{q}^s - v^s)\left\{\bar{G}, {}_*\Phi^1_s\right\} \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1_s\right) \tag{8.4.36}$$

となる．この式の導出には (8.4.31) が必要であった．H^* や H^*_T は v^s がきまっているから (8.4.31) を満さないので，$\bar{H}$ でなければ，(8.4.35) の形式はえられない．これが $\bar{H}$ を導入した理由である．

次に，ここで $\bar{G}$ が定常条件 (8.4.14) を満し，かつ，すでに決定された v^s を用いて，

$$(\dot{q}^s - v^s)\left\{\bar{G}, {}_*\Phi^1_s\right\} = \frac{df}{dt} \quad \mathrm{mod}\left(\Phi^1_s\right) \tag{8.4.37}$$

（f は未定の関数）を要請するならば，(8.4.36) と (8.4.37) により L は変換 (8.4.11) のもとで準不変となる；

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_i} - \bar{G} + f\right) \equiv \frac{dF}{dt}. \tag{8.4.38}$$

f の具体的な表式は，(8.4.37) の左辺が時間の全微分となるような解を求めることにより定まる．この δL の表式は，ゲージ変換のときと比較して f 項が付加されていることに注意されたい．

$\bar{G}(\eta)$ の定義 (8.4.13) の η^s_m を決定する漸化式は，(8.4.14) から

$$\dot{\eta}^s_m + \eta^s_{m-1} + \eta^t_M C^s_{tm} = 0, \tag{8.4.39}$$

$$\dot{\eta}^s_m \equiv \{\eta^s_m, H^*\} + \frac{\partial \eta^s_m}{\partial t} \tag{8.4.40}$$

となる．これにより，η_M^s を与えれば η_m^s は逐次求まる．この η_M^s は定数パラメータか，または定数パラメータを係数とする q, p の定まった関数である．(8.4.37) の解として，任意関数を含む η_M^s は存在しないからである．

かくして，第２類拘束条件の場合にも，$\eta_k^s \neq 0$ の解があるとき，L を準不変にする拡張された変換が存在し，その母関数の構成法がわかったわけである．

定数パラメータ $\eta_M^s = \eta^s$ によって表されるこの変換は大域的（非局所的）変換であるから，$\bar{G}$ は大域的変換の母関数である．

これまでの結果をまとめると，第１類と第２類拘束条件が共存する系の変換の母関数は，局所的ゲージ変換と大域的変換の母関数の和となる；

$$\tilde{G} = G(\epsilon) + \bar{G}(\eta) \tag{8.4.41}$$

ここに

$$G(\epsilon) = \epsilon_k^\alpha {}_*\Phi_a^k, \quad \bar{G}(\eta) = \eta_m^s {}_*\Phi_s^m \tag{8.4.42}$$

定常条件は

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \left\{\tilde{G}, H^*\right\} \equiv 0 \mod \left({}_*\Phi_\alpha^1, {}_*\Phi_s^1\right), \tag{8.4.43}$$

$$\left\{\tilde{G}, {}_*\Phi_\alpha^1\right\} \equiv 0 \mod \left({}_*\Phi_\alpha^1, {}_*\Phi_s^1\right), \tag{8.4.44}$$

および

$$(\dot{q}^s - v^s)\left\{\bar{G}, {}_*\Phi_s^1\right\} = \frac{df}{dt} \mod \left({}_*\Phi_\alpha^1, {}_*\Phi_s^1\right), \tag{8.4.45}$$

である．ϵ_k^α と η_m^s の漸化式は，それぞれ同形の

$$\dot{\epsilon}_k^\alpha + \epsilon_{k-1}^\alpha + \epsilon_K^\beta C_{\beta k}^\alpha = 0, \tag{8.4.46}$$

$$\dot{\eta}_m^s + \eta_{m-1}^s + \eta_M^t C_{tm}^s = 0 \tag{8.4.47}$$

である [(6)]．

最後に，無限自由度の場の理論の場合の表式を示しておこう．ラグランジュ関数密度 $\boldsymbol{L}$ とハミルトン関数密度 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}_T$ および $\boldsymbol{H}^*$ を同様に定義し，変換の母関数密度

$\tilde{\boldsymbol{G}}$ を用いて定式化できる．(8.4.41), (8.4.43) ∼ (8.4.45) はそれぞれ次のようになる；

$$\tilde{G} = \int d^3x \tilde{\boldsymbol{G}} \equiv \int d^3x [\epsilon^{\alpha}_{k}{}_{*}\Phi^{k}_{\alpha} + \eta^{s}_{m}{}_{*}\Phi^{m}_{s}], \tag{8.4.48}$$

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \left\{ \tilde{G}, H^* \right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_{*}\Phi^{1}_{\alpha}, {}_{*}\Phi^{1}_{s} \right), \tag{8.4.49}$$

$$\left\{ \tilde{G}, {}_{*}\Phi^{1}_{\alpha} \right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_{*}\Phi^{1}_{\alpha}, {}_{*}\Phi^{1}_{s} \right),$$

および

$$\left(\dot{q}^s(x) - v^s \right) \left\{ \tilde{G}, {}_{*}\Phi^{1}_{s} \right\} = \partial_\mu f^\mu \quad \mathrm{mod}\left({}_{*}\Phi^{1}_{\alpha}, {}_{*}\Phi^{1}_{s} \right) \tag{8.4.50}$$

以上で第 1 類および第 2 類拘束条件と，局所的ゲージ変換および大域的変換の生成母関数の関係についての一般論は終了するが，一言付け加えておく．それは，第 2 類拘束条件の場合は $\bar{G}$ の定常条件 (8.4.43) と (8.4.45) の解がないもの ($\eta^s_m = 0$) も存在するということである．この点が第 1 類拘束と異なる重要なことである．

また，$\bar{G}$ は大域的変換の母関数で，(8.4.15) で与えられる変換は L を準不変にする．つまり速度位相空間での大域的変換の母関数ではあるが，しかし，第 1 類拘束の場合の G とちがって，必ずしも正準変換の母関数ではない．つまり，$\delta p_i = -\partial \bar{G}/\partial q^i$ とは限らないのである．その理由は (8.4.45) のゆえに，$\bar{G}$ に余分な付加項がつくためである．

例題 8.5. 第 2 類拘束条件のみ存在する簡単なモデル．

ラグランジュ関数として，次のモデルをとる．

$$L = \dot{q}^1 q^2 - q^1 \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\left(q^1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(q^2\right)^2 \tag{8.4.51}$$

1 次拘束条件は

$${}_{*}\Phi_1 = p_1 - q^2 \approx 0, \quad {}_{*}\Phi_2 = p_2 + q^1 \approx 0 \tag{8.4.52}$$

この ${}_{*}\Phi_1, {}_{*}\Phi_2$ は $\{{}_{*}\Phi_1, {}_{*}\Phi_2\} = -2$ であるから，第 2 類拘束条件である．

全ハミルトン関数は

$$H_T = p_i \dot{q}^i - L + v^1_* \Phi_1 + v^2_* \Phi_2 = \frac{1}{2}\left(q^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(q^2\right)^2 + v^1_* \Phi_1 + v^2_* \Phi_2 \tag{8.4.53}$$

となる．${}_{*}\Phi_s$ の定常条件から

$$
{}_*\dot{\Phi}_1 = \{{}_*\Phi_1, H_T\} = -q^1 - 2v^2 = 0 \qquad \therefore \quad v^2 = -\frac{q^1}{2}
$$

$$
{}_*\dot{\Phi}_2 = \{{}_*\Phi_2, H_T\} = -q^2 + 2v^1 = 0 \qquad \therefore \quad v^1 = \frac{q^2}{2}
$$

よって，これ以上拘束条件ではない．

$$
H_T^* = \frac{1}{2}\left(p_1 q^2 - p_2 q^1\right) \tag{8.4.54}
$$

をえる．生成母関数

$$
\bar{G}(\eta) = \eta^1\left(p_1 - q^2\right) + \eta^2\left(p_2 + q^1\right) \tag{8.4.55}
$$

の定常条件は

$$
\dot{\bar{G}} = \left\{\bar{G}, H_T^*\right\} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = \frac{1}{2}\eta^1\left(p_2 + q^1\right) - \frac{1}{2}\eta^2\left(p_1 - q^2\right) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi_s) \tag{8.4.56}
$$

となり，無条件に満される．(8.4.45) は

$$
\begin{aligned}
&\left(\dot{q}^1 - \frac{q^2}{2}\right)\left\{\bar{G}, p_1 - q^2\right\} + \left(\dot{q}^2 + \frac{q^1}{2}\right)\left\{\bar{G}, p_2 + q^1\right\} \\
&= 2\left(\dot{q}^1 - \frac{q^2}{2}\right)\eta^2 - 2\left(\dot{q}^2 + \frac{q^1}{2}\right)\eta^1 = \frac{df}{dt}
\end{aligned}
$$

となる．これを満すためには $\eta^1 = \eta q^2$, $\quad \eta^2 = -\eta q^1$（η は微小定数）であればよい．すると

$$
f = -\eta\left(\left(q^1\right)^2 + \left(q^2\right)^2\right) \tag{8.4.57}
$$

そして，

$$
\bar{G} = \eta\left(p_1 q^2 - p_2 q^1 - \left(q^1\right)^2 - \left(q^2\right)^2\right) \tag{8.4.58}
$$

となる．

この $\bar{G}$ を母関数とする微小変換は η を定数パラメータとして，

$$
\delta q^1 = \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_1} = \eta q^2, \quad \delta q^2 = \frac{\partial \bar{G}}{\partial p_2} = -\eta q^1 \tag{8.4.59}
$$

である．この変換により L の変分は

$$
\delta L = \eta \dot{q}^2 q^2 + \dot{q}^1\left(-\eta q^1\right) - \left(-\eta \dot{q}^1\right) q^1 - \dot{q}^2\left(\eta q^2\right) - q^1\left(\eta q^2\right) - q^2\left(-\eta q^1\right) = 0 \tag{8.4.60}
$$

他方，(8.4.38) からも (8.4.58), (8.4.57) より $\delta L = 0$ をえる．

かくして，$\bar{G}$ は速度位相空間における大域的変換（q^1, q^2 面内の回転）の母関数である*)．

この $\bar{G}$ を用いて $\delta p_i = -\partial\bar{G}/\partial q^i$ とすると

$$\delta p_1 = \eta\left(p_2 + q^1\right) \approx 0, \quad \delta p_2 = -\eta\left(p_1 - q^2\right) \approx 0$$

となる．だがこの δp_i は p_i の定義

$$p_1 = q^2, \quad p_2 = -q^1 \to \delta p_1 = \delta q^2, \quad \delta p_2 = -\delta q^1$$

を満さない．

例題 8.6.　質量のあるヤン-ミルス場

今度も第2類拘束のみ現われる場の理論の例を挙げる．質量のあるヤン-ミルス場のラグランジュ関数密度は，例題 8.3 の $\boldsymbol{L}$ に質量項が加わったものである．

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + \frac{1}{2}m^2 A^a_\mu A^\mu_a \tag{8.4.61}$$

$F^a_{\mu\nu}$ の定義などは例題 8.3 と同じである．

A^a_μ に共役な運動量は，前例と同じく

$$\pi^\mu_a = \frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\dot{A}^a_\mu} = -F^{0\mu}_a \tag{8.4.62}$$

であり，1次拘束条件も同様に

$${}_*\Phi^1_s \to {}_*\Phi^1_a = \pi^0_a \tag{8.4.63}$$

ここで a は拘束条件の番号で s に相当する．ハミルトン関数密度は

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{2}\pi^i_a\pi^a_i + \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a - A^a_0 D^i_{ab}\pi^b_i - \frac{1}{2}m^2 A^a_\mu A^\mu_a \tag{8.4.64}$$

$$\boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{H} + v^a_* \Phi^1_a \tag{8.4.65}$$

2次拘束条件は

$${}_*\Phi^2_a = \left\{{}_*\Phi^1_a, \int d^3x\boldsymbol{H}_T\right\} = D^i_{ab}\pi^b_i + m^2 A^0_a \tag{8.4.66}$$

注*）しかし，この $\bar{G}$ は位相空間での生成母関数ではない．

である．この第２項のゆえに，${}_*\Phi_a^1, {}_*\Phi_a^2$ は第２類拘束となる；

$$\left\{{}_*\Phi_a^1(x), {}_*\Phi_b^2(x')\right\} = \delta_{ab} m^2 \delta^3(x - x') \tag{8.4.67}$$

したがって，これ以上拘束条件は現れない．

$${}_*\dot{\Phi}_a^2 = \left\{{}_*\Phi_a^2, \int d^3x \boldsymbol{H}_T\right\} = -f_{ab}^c A_{0*}^b \Phi_c^2 + m^2\left(D_{ab}^i A_i^b + v^a\right) \approx 0$$

上式の第１項は落して v^a をきめてよい．すると

$$v^a = -D_{ab}^i A_i^b = -\partial_i A_a^i \tag{8.4.68}$$

上式で，D_{ab}^i の定義 (8.2.55) と f_{abc} の完全反対称性を用いた．

よって，第１類拘束がないので，(8.4.65) と (8.4.68) とから

$$\boldsymbol{H}_T^* = \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \pi_0^a \partial_i A_a^i \tag{8.4.69}$$

をえる．この $H_T^* = H^*$ を用いて，改めて ${}_*\Phi_a^2$ を定義し直しても，元と同じである．

変換の母関数

$$\bar{\boldsymbol{G}} = \eta_1^a{}_*\Phi_a^1 + \eta_2^a{}_*\Phi_a^2 \tag{8.4.70}$$

の満すべき条件は，(8.4.47) と (8.4.50) に対応して

$$\eta_1^a + \dot{\eta}_2^a - f_{abc}\eta_2^b A_0^c = 0 \mod \left({}_*\Phi_a^1\right), \tag{8.4.71}$$

$$\left(\partial_0 A_a^0 - v^a\right)\left\{\bar{G}, \pi_a^0\right\} = \partial_\mu f^\mu \mod \left({}_*\Phi_a^1\right) \tag{8.4.72}$$

をえる．ここで，(8.4.72) で $v^a = -\partial_i A_a^i$ を用いると

$$\partial_\mu A_a^\mu \cdot \left\{\bar{G}, \pi_a^0\right\} = \partial_\mu f^\mu \mod \left({}_*\Phi_a^1\right) \tag{8.4.73}$$

となる．また，

$$\left\{\bar{G}, \pi_a^0\right\} = \left\{\eta_2^b, \pi_a^0\right\}_* \Phi_b^2 + \eta_2^b m^2 \mod \left({}_*\Phi_a^1 = \pi_a^0\right) \tag{8.4.74}$$

であるから，η_2^b が定数ならば第１項は消えるから，上の条件は満される．そこで $\eta_2^a = \eta^a =$ 定数とおいて

$$f^\mu = m^2 \eta^a A_a^\mu \tag{8.4.75}$$

をえる．

よって，(8.4.72) の解は存在し，(8.4.71) から

$$\eta_1^a = f_{bc}^a \eta^b A_0^c \tag{8.4.76}$$

をえる．

こうして求まった η_1^a と $\eta_2^a = \eta^a$ を (8.4.70) に入れて

$$\bar{G} = \int d^3x \bar{\boldsymbol{G}} = \int d^3x \eta^a \left(-f_{abc}\pi^{b\mu} A_\mu^c + \partial_i \pi_a^i + m^2 A_a^0\right) \tag{8.4.77}$$

をえる．上式の第 2 項 $\partial_i \pi_a^i$ は δA_μ^a に効かないので，表面積分として落してよい．この $\bar{G}$ によって生成される微小変換は

$$\delta A_\mu^a(x) = \frac{\delta \bar{G}}{\delta \pi_a^\mu(x)} = f_{bc}^a \eta^b A_\mu^c(x) \tag{8.4.78}$$

となり，この変換は内部空間での回転である．この δA_μ^a はゲージ変換の δA_μ^a(8.2.62) で $\epsilon^b(x)$ を η^b とした特殊ケースである．この大域的微小変換のもとで回転不変な (8.4.61) の L は，当然ながら $\delta L = 0$ となる．しかし，位相空間での変換母関数ではない．実際に，

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial A_a^0} = \eta^a m^2 - \eta^c f_{bc}^a \pi_0^b \approx \eta^a m^2 \tag{8.4.79}$$

であるから正しい $\delta \pi_0^a = 0$ を与えない．

だが，(8.4.38) から，作用積分の変分は

$$\delta L = \int d^3x \partial_0 \left(\pi_\mu^a \frac{\partial \bar{\boldsymbol{G}}}{\partial \pi_\mu^a} - \bar{\boldsymbol{G}} + f^0\right) = \int d^3x \partial_0 \left(\eta^a \partial_i \pi_a^i\right) = \int d^3x \partial_i \left(\eta^a \partial_0 \pi_a^i\right) \tag{8.4.80}$$

となり，これは 3 次元表面積分により 0 となるから矛盾のない結果をえる．

他方，内部空間の回転に対する作用積分の不変性から導かれるネーターの保存量 (3.2 節参照) からえられる変換の生成母関数は

$$N = \int d^3x J_0 = -\int d^3x \eta^a f_{abc} \pi^{b\mu} A_\mu^c \tag{8.4.81}$$

ここに，J_0 はネーターの保存流

$$J_\mu = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial A_{\nu,\mu}^a} \delta A_\nu^a = -F_{\mu\nu}^a \delta A_a^\nu = -\eta^a f_{abc} F_{\mu\nu}^b A^{c\nu} \tag{8.4.82}$$

の時間成分である．これからえられる変換 $\delta_N A^a_\mu = \delta N/\delta\pi^\mu_a$ は $\bar{G}$ からえられた (8.4.78) と一致する．

例題 8.7. 電磁場と荷電フェルミ粒子系—第１類と第２類拘束の共存系—(7)

荷電粒子とゲージ場とが相互作用する系は，第１類と第２類拘束の共存する典型的な例である．スピン 1/2 のディラック粒子と電磁場の系をとる．一般的には，ヤン-ミルス場の場合も同様にやれる．

ラグランジュ関数密度は，ψ をスピノール場として

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu\bar{\psi}\cdot\gamma^\mu\psi\right] - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - m\bar{\psi}\psi \tag{8.4.83}$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \tag{8.4.84}$$

である．$\psi^\dagger$ は ψ のエルミット共役を表す．

$A_\mu, \psi, \psi^\dagger$ の共役運動量は*)

$$\pi^\mu = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \tag{8.4.85}$$

$$\pi = \boldsymbol{L}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial(\partial_0\psi)} = \frac{i}{2}\psi^\dagger, \quad \pi^\dagger = \boldsymbol{L}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\left(\partial_0\psi^\dagger\right)} = \frac{i}{2}\psi \tag{8.4.86}$$

よって，３つの１次拘束条件が存在する；

$$\left.\begin{aligned} {}_*\Phi^1_e &= \pi^0 \approx 0 \\ {}_*\Phi^1 &= \pi^\dagger - \frac{i}{2}\psi \approx 0 \\ {}_*\Phi^{\dagger 1} &= \pi - \frac{i}{2}\psi^\dagger \approx 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.4.87}$$

ここで，通常のように，同時刻のポアソン括弧を次のように定める**)；

$$\left.\begin{aligned} \{A_\mu(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\boldsymbol{x}')\} &= \delta^\nu_\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \{\psi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{x}')\} &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \\ \left\{\psi^\dagger(\boldsymbol{x}), \pi^\dagger(\boldsymbol{x}')\right\} &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \end{aligned}\right\} \tag{8.4.88}$$

注*) $\overleftarrow{\partial}/\partial$ は左からの微分を表す．$\psi, \psi^\dagger$ は反可換であるため，微分の方向を定めておく必要がある．

注**) 厳密にはフェルミ粒子の場合は，順序が問題になるので，次数つきポアソン括弧（graded P.B.）である．

これ以外のものはすべて 0 となる．このポアソン括弧により，${}_*\Phi^1$ と ${}_*\Phi^{\dagger 1}$ とは第 2 類拘束となる；

$$\left\{{}_*\Phi^{\dagger 1}(\boldsymbol{x}), {}_*\Phi^1(\boldsymbol{x}')\right\} = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{8.4.89}$$

全ハミルトン関数は

$$H_T = H + \int d^3x[v^e{}_*\Phi_e^1 + {}_*\Phi^{\dagger 1}v + v^\dagger{}_*\Phi^1] \tag{8.4.90}$$

である．ただし，$v, v^\dagger$ はディラック場から作られる未定因子であり，

$$\begin{aligned} H \equiv \int d^3x \biggl\{ & -\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0\partial_i\pi^i \\ & -\frac{i}{2}[\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - \partial_i\bar{\psi}\cdot\gamma^i\psi] + eA^\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi \biggr\} \end{aligned} \tag{8.4.91}$$

である．

この H_T により，${}_*\Phi_e^1$ の定常条件から

$${}_*\Phi_e^2 = \left\{{}_*\Phi_e^1, H_T\right\} = \partial_i\pi^i - e\psi^\dagger\psi \approx 0 \tag{8.4.92}$$

このままでは，${}_*\Phi_e^2, {}_*\Phi^1, \Phi^{\dagger 1}$ は第 2 類拘束であるが，これらの 1 次結合

$${}_*\tilde{\Phi}_e^2 = {}_*\Phi_e^2 + ie\left({}_*\Phi^{\dagger 1}\psi + \psi^\dagger{}_*\Phi^1\right) = \partial_i\pi^i + ie\left(\pi\psi + \psi^\dagger\pi^\dagger\right) \tag{8.4.93}$$

をつくると，

$$\left.\begin{aligned} \left\{{}_*\tilde{\Phi}_e^2(\boldsymbol{x}), {}_*\Phi^1(\boldsymbol{x}')\right\} &= -ie{}_*\Phi^1(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \\ \left\{{}_*\tilde{\Phi}_e^2(\boldsymbol{x}), {}_*\Phi^{\dagger 1}(\boldsymbol{x}')\right\} &= -ie{}_*\Phi^{\dagger 1}(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \end{aligned}\right\} \tag{8.4.94}$$

ゆえに，${}_*\tilde{\Phi}_e^2$ は第 1 類拘束となる．よって，2 つの第 1 類拘束 ${}_*\Phi_e^1, {}_*\tilde{\Phi}_e^2$ と 2 つの第 2 類拘束 ${}_*\Phi^1$ と ${}_*\Phi^{\dagger 1}$ をえる．

第 2 類 ${}_*\Phi^1, {}_*\Phi^{\dagger 1}$ の定常条件は v と $v^\dagger$ を次のように決定する；

$$\left.\begin{aligned} v &= -\gamma^0\left[\gamma^i\partial_i\psi + ieA_\mu\gamma^\mu\psi + im\psi\right] \\ v^\dagger &= \partial_i\bar{\psi}\gamma^i - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - im\bar{\psi} \end{aligned}\right\} \tag{8.4.95}$$

こうして全ハミルトン関数として

$$H_T^* = H^* + \int d^3x v^e {}_*\Phi_e^1 \tag{8.4.96}$$

$$\begin{aligned}H^* = \int d^3x \Big\{ &-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - A_0\partial_i\pi^i \\ &- \pi\gamma^0\left[\gamma^i\partial_i\psi + ieA_\mu\gamma^\mu\psi + im\psi\right] + \left[\partial_i\bar{\psi}\gamma^i - ieA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - im\bar{\psi}\right]\pi^\dagger \Big\}\end{aligned} \tag{8.4.97}$$

をえる．

この H^* を用いると，${}_*\Phi_e^1$ の定常条件は

$$\left\{{}_*\Phi_e^1, H^*\right\} = \partial_i\pi^i + ie\left(\pi\psi + \psi^\dagger\pi^\dagger\right) = {}_*\tilde{\Phi}_e^2, \quad \left\{{}_*\tilde{\Phi}_e^2, H^*\right\} = 0 \tag{8.4.98}$$

となるから，第1類拘束の列 ${}_*\Phi_e^1, {}_*\tilde{\Phi}_e^2$ と第2類拘束の列 ${}_*\Phi^1, {}_*\Phi^{\dagger 1}$ とは分離する．

次にゲージ変換と大域的変換の母関数を求めよう．

$$\left.\begin{aligned}\tilde{G} &= \int d^3x[\boldsymbol{G}(\epsilon) + \bar{\boldsymbol{G}}(\eta)] \\ \boldsymbol{G}(\epsilon) &= \epsilon_1^e {}_*\Phi_e^1 + \epsilon_2^e {}_*\tilde{\Phi}_e^2 \\ \bar{\boldsymbol{G}}(\eta) &= \eta_1^\dagger {}_*\Phi^1 + {}_*\Phi^{\dagger 1}\eta_1\end{aligned}\right\} \tag{8.4.99}$$

とおくと，(8.4.43), (8.4.44) に対応する定常条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{G}(\epsilon)}{\partial t} + \{\boldsymbol{G}, H^*\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi_e^1\right) \\ &\left\{\boldsymbol{G}, {}_*\Phi_e^1\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi_e^1\right)\end{aligned}\right\} \tag{8.4.100}$$

から，$\epsilon(x)$ を微小任意関数として，$\epsilon_1^e = -\dot{\epsilon}(x)$，$\epsilon_2^e = \epsilon(x)$ をえる．また，(8.4.50) に対応するものは

$$\left\{\tilde{G}, {}_*\Phi^{\dagger 1}\right\}(\partial_0\psi - v) - \left(\partial_0\psi^\dagger + v^\dagger\right)\left\{\tilde{G}, {}_*\Phi^1\right\} = \partial_\mu f^\mu \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^{\dagger 1}\right)$$

すなわち

$$i\eta_1^\dagger(\partial_0\psi - v) + \left(\partial_0\psi^\dagger + v^\dagger\right)i\eta_1 = \partial_\mu f^\mu \tag{8.4.101}$$

となる．この条件式の解を求めるために，

$$\eta_1 = iX\psi, \quad \eta_1^\dagger = i\psi^\dagger X \tag{8.4.102}$$

とおこう．すると (8.4.101) から

$$\left.\begin{aligned}X &= e(c + c_5\gamma_5) \\ f^\mu &= \bar{\psi}\partial^\mu X\psi\end{aligned}\right\} \tag{8.4.103}$$

をえる．ここに，c と c_5 は定数パラメータである．ただし，質量 $m \neq 0$ のとき $c_5 = 0$ である．

こうして第 1 類拘束条件から微小ゲージ変換の母関数

$$
\begin{aligned}
G(\epsilon) &= \int d^3x \left[(-\dot{\epsilon}(x)_* \Phi_e^1 + \epsilon_* \tilde{\Phi}_e^2 \right] \\
&= \int d^3x \left[-\partial_\mu \epsilon(x) \pi^\mu + ie\epsilon(x) \left(\pi\psi + \psi^\dagger \pi^\dagger \right) \right]
\end{aligned}
\tag{8.4.104}
$$

がえられ，第 2 類拘束条件から大域的変換の母関数

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{G}(c) = \textstyle\int d^3x ie \left(c\bar{\boldsymbol{G}}_0 + c_5 \bar{\boldsymbol{G}}_5 \right), \\
&\bar{\boldsymbol{G}}_0 = {}_*\Phi^{\dagger 1}\psi + \psi^\dagger{}_*\Phi^1 = \pi\psi + \psi^\dagger\pi^\dagger - i\psi^\dagger\psi, \\
&\bar{\boldsymbol{G}}_5 = {}_*\Phi^{\dagger 1}\gamma_5\psi + \psi^\dagger\gamma_{5*}\Phi^1 = \pi\gamma_5\psi + \psi^\dagger\gamma_5\pi^\dagger - i\psi^\dagger\gamma_5\psi
\end{aligned}
\right\}
\tag{8.4.105}
$$

がえられる．$\bar{G}_0$ と $\bar{G}_5$ はそれぞれよく知られた $U(1)$ 対称性とカイラル $U(1)_s$ 対称性変換（$m = 0$ のとき）を生成する母関数である．

実際に，$\bar{G}(c)$ によって与えられる変換は

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta\psi = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{G}}}{\partial \pi} = ie(c\psi + c_5\gamma_5\psi) \\
&\delta\psi^\dagger = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{G}}}{\partial \pi^+} = -ie\left(c\psi^\dagger + c_5\psi^\dagger\gamma_5 \right) \\
&\delta A_\mu = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{8.4.106}
$$

この変換式を (8.4.81) の $\boldsymbol{L}$ の変分

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{L} =& \frac{i}{2}\left(\delta\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\delta\psi - \partial_\mu\delta\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi \right) \\
&- e\left(\delta\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\delta\psi \right) A_\mu - m\left(\delta\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\delta\psi \right)
\end{aligned}
$$

に直接代入すれば，各項ごとにゼロとなることが確かめられる．ただし，最後の m 項の所は $c_5 = 0$．また，$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ に注意．

文献

(1) R. Sugano, Prog. Theor. Phys. **68** (1982), 1377

(2) L. Castellani, Ann. of Phys. **143** (1982)

(3) R. Sugano, Y. Saito and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **76** (1986), 282.

(4) R. Sugano and H. Kamo, Prog. Theor. Phys. **67** (1982), 1966.

(5) R. Sugano and Y. Kagraoka, Z. Phys. **C52** (1991), 437.

(6) R. Sugano and T. Kimura, Phys. Rev. **D41** (1990), 1247.

(7) R. Sugano and Y. Kagraoka, Z. Phys. **C52** (1991), 443.

第 9 章

位相空間と速度位相空間の対応

拘束条件のない正則ラグランジュ関数で表される力学系の場合は，第 2 章で述べたように，ラグランジュ形式（速度位相空間での定式化）とハミルトン形式（位相空間での定式化）は完全に同等であって，相互の移行も容易に行なわれる．しかし，拘束条件の現われる系では，その対応が完全ではない．運動量の定義式

$$p_i = \frac{\partial L(q,\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (\xi^i = \dot{q}^i)$$

のうちで，拘束条件の数だけの p_r が独立でないために，上式を ξ^i について完全に解くことができなかった．拘束条件の数だけの ξ^r が不定のまま残り，p_i と ξ^i との 1 対 1 対応が破れた．

また，拘束条件にしても，位相空間での 1 次拘束 ${}_*\Phi^1_\alpha(q,p)$ は速度位相空間では恒等的にゼロ $\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi)) \equiv 0$ なので，1 次拘束は速度位相空間では存在しない．それゆえ，ゲージ変換や大域的変換の母関数 $G(\epsilon)$ や $\bar{G}(\eta)$ は速度位相空間ではそれに似た形ではつくれない．このように**拘束系の理論は，両空間での完全な対応が破れ，単純ではない．**

そればかりでなく，次に述べるように，両空間での定式化の対応には留意すべき問題が内在するのである．

前章では，拘束条件とゲージ変換や大域的変換の母関数の関係を，主として位相空間で解説した．しかし，8.4 節で言及したように，第 2 類拘束によって構成される大域的変換の母関数は，必ずしも正準変換の母関数ではないこと，すなわち $\delta p = -\partial_* \bar{G}/\partial q^i$ とすると，速度位相空間との整合性（$p_i = \partial L/\partial \xi^i$ で定義したものとの対応）が破れる．他方，第 1 類拘束によって構成されるゲージ変換の母関数は

(8.2.28) のように，正準変換の母関数として作用する．それゆえ，速度位相空間との対応は問題ないように見える．しかしながら，母関数 $_*G$ が運動量 p_i の２次以上の高次の項を含むとき，つまり微小ゲージ変換が p_i（または $\dot{q}^i = \xi^i$）に依存する場合には，位相空間と速度位相空間とで，ゲージ変換の表式が正しく対応しないのである．ただし，その対応は運動方程式のもとでは整合的なので，古的力学の範囲では問題にならない (1)．

しかし，経路積分を用いた量子化のとき，古典的運動方程式からずれた経路からの寄与があるので，これが問題になる．古典論から量子論に移行したときに量子化異常 (quantum anomaly) が現われることがあるが，この不整合が量子異常の原因となるのである．

したがって，位相空間と速度位相空間での対応をゲージ変換に関して詳細に考察する必要がある．そこで本章では，拘束条件とディラック理論について，両空間での定式化の相互関係をつけ，その整合性を吟味する．

9.1　位相空間と速度位相空間との相互写像 (2)(3)

位相空間と速度位相空間の相互移行が，拘束条件のある場合に問題となる点を，まず最初に具体的に理解しておく方が，後の考察に好都合である．

ヘシアン行列 A_{ij} が非正則で，拘束条件のある系では，運動量 p_i が独立でないために

$$p_i = p_i(q, \xi), \quad (i = 1 \sim N) \tag{9.1.1}$$

を ξ^i について一義的に解くことができない．(9.1.1) をしいて ξ^i について解くと，任意性がある．それを見るために，

$$\bar{\xi}^i \equiv \xi^i + u^\alpha \tau^i_\alpha, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{9.1.2}$$

とおく．ここに，u^α は任意関数，τ^i_α は A_{ij} のゼロ固有値ベクトルである．すると，

$$p_i(q, \xi) = p_i(q, \bar{\xi}) \tag{9.1.3}$$

となる．

その証明：右辺を ξ^i の点で $u^\alpha \tau^i_\alpha$ について展開すると

$$
\begin{aligned}
p_i(q,\bar{\xi}) &= p_i(q,\xi) + \frac{\partial p_i}{\partial \xi^j} u^\alpha \tau^j_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \xi^j \partial \xi^k} u^\alpha \tau^j_\alpha \cdot u^\beta \tau^k_\beta + \cdots \\
&= p_i(q,\xi) + A_{ij} u^\alpha \tau^j_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial A_{ij}}{\partial \xi^k}\tau^j_\alpha \tau^k_\beta u^\alpha u^\beta + \cdots
\end{aligned}
$$

この右辺第 2 項は $A_{ij}\tau^j_\alpha = 0$ ゆえ消える．第 3 項は，$A_{ij} = \partial^2 L/\partial \xi^i \partial \xi^j$ ゆえ

$$
\tau^j_\alpha \tau^k_\beta \frac{\partial A_{ij}}{\partial \xi^k} = \tau^j_\alpha \tau^k_\beta \frac{\partial A_{jk}}{\partial \xi^i} = -\tau^j_\alpha A_{jk}\frac{\partial \tau^k_\beta}{\partial \xi^i} = 0 \tag{9.1.4}
$$

第 4 項以下も同様に消えるから，(9.1.3) となる．

また，ラグランジュ関数については，

$$
L(q,\bar{\xi}) = L(q,\xi) + u^\alpha \tau^i_\alpha p_i(q,\xi) \tag{9.1.5}
$$

という関係が成立つ．この証明も，$L(q,\bar{\xi})$ を ξ のまわりで展開し，(9.1.4) を用いれば容易である．(9.1.5) により

$$
H = p_i \bar{\xi}^i - L(q,\bar{\xi}) = p_i \xi^i - L(q,\xi) \tag{9.1.6}
$$

であるから，H の定義には，ξ^i により生ずる不定性がある．

次に，位相空間と速度位相空間との相互移行における問題点を示そう．位相空間における q^i, p_i の関数 ${}_*f(q,p)$ の微分*)

$$
d_* f(q,p) = \frac{\partial_* f}{{}_*\partial q^i} dq^i + \frac{\partial_* f}{\partial p_i} dp_i
$$

を速度位相空間に写像することは問題なく行われる；

$$
\begin{aligned}
df(q,p(q,\xi)) &= \frac{\partial f}{{}_*\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \xi^j} d\xi^j \\
&= \left(\frac{\partial f}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right) dq^i + A_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_j} d\xi^i
\end{aligned} \tag{9.1.7}
$$

つまり，p_i は q, ξ の関数として定まっているから，一義的に

$$
\left.
\begin{aligned}
dp_i &\to dp_i(q,\xi) = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} dq^j + A_{ij} d\xi^j \\
dq^i &\to dq^i
\end{aligned}
\right\} \tag{9.1.8}
$$

注*）$\partial/{}_*\partial q^i$ は，p_i, q^i を独立変数とした微分演算を示し，$p(q,\xi)$ の中の q には作用しない．

と写像される．それに対して，速度位相空間から位相空間への写像は，ξ^i の不定性 (9.1.2) のために一義的でない．それゆえ，微分 $d\xi^i$ の位相空間への写像は存在しない．

他方，微分演算子 $\partial/\partial q^i$ と $\partial/\partial \xi^i$ は速度位相空間から位相空間への写像が存在するのに対して，逆の写像 $\partial/\partial p_i \to \partial/\partial \xi^i$ は存在しない．速度位相空間からの移行は

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^i} &\to \frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_j} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^i} &\to \frac{\partial p_j}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{\partial p_j} = A_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j} \end{aligned}\right\} \tag{9.1.9}$$

である．A_{ij} が非正則であるために，その逆行列が存在しないので，上の第２式の逆写像はないのである．

このように，両空間相互の移行関係は，**微分に関しては (9.1.8) のように，位相空間から速度位相空間へ，また微分演算子に関しては (9.1.9) のように速度位相空間から位相空間への写像は存在するが，それらの逆は存在しない．**

これが両空間での力学理論の形式が必ずしも 1 対 1 に対応しない理由である．そこで，両方の理論形式がうまく対応し，互に同等であるための条件を吟味しよう．

9.2　速度位相空間での定式化 (2)(3)

自由度 N の質点系ラグランジュ関数から導かれる運動方程式は，第 5 章 5.2 節で与えたように

$$A_{ij}d\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^j}dq^j - \frac{\partial L}{\partial q^i}dt = 0, \quad dq^i - \xi^i dt = 0 \tag{9.2.1}$$

である．ヘシアン行列の階数が $N-R$ のとき，R 個のゼロ固有値ベクトル τ^i_α が存在する；

$$A_{ij}\tau^j_\alpha = \tau^j_\alpha A_{ji} = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{9.2.2}$$

すると，(9.2.1) に τ^i_α を乗じて和をとり，dt で除すと拘束条件

$$\Phi^2_\alpha \equiv \tau^i_\alpha\left(-\frac{\partial p_i}{\partial q_j}\xi^j + \frac{\partial L}{\partial q^i}\right) \equiv \tau^i_\alpha S_i \approx 0 \tag{9.2.3}$$

をえる．($\partial L/\partial \xi^i$ を p_i と略記する．) Φ^2_α は運動方程式から導かれたものであるから２次拘束条件である．

(9.2.3) で R 個のベクトル τ^i_α は A_{ij} のゼロ固有値ベクトルとして完全系であるから，

$$S_i \equiv -\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\xi^j + \frac{\partial L}{\partial q^i} \approx A_{ij}\eta^j \tag{9.2.4}$$

なる η^i が存在する．したがって，(9.2.1) の第 1 式は

$$A_{ij}(d\xi^j - \eta^j dt) \approx 0 \tag{9.2.5}$$

と表される．これより

$$\theta^i \equiv d\xi^i - \eta^i dt - u^\alpha \tau^i_\alpha dt \approx 0 \tag{9.2.6}$$

をえる．u^α は未定の任意関数である．こうして導かれた $\theta^i \approx 0$ と

$$\rho^i = dq^i - \xi^i dt = 0 \tag{9.2.7}$$

を運動方程式として採用することにする．

速度位相空間では，ポアソン括弧が使えないし，位相空間への写像は微分演算子のみ可能であるから，微分演算子による生成系を用いて理論を定式化すべきである．

そこで，これら $2N$ 個の運動方程式の生成系 X_T を 5.2 節で行った方法で求めよう．X_T として

$$X_T = a^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + b^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.2.8}$$

とおき，θ^i と ρ^i との内積（5.2 節で定義）をとり，それらの直交条件から

$$\langle \theta^i, X_T \rangle = a^i - \eta^i - u^\alpha \tau^i_\alpha = 0,$$
$$\langle \rho^i, X_T \rangle = b^i - \xi^i = 0,$$

をえる．よって，

$$X_T = \left(\eta^i + u^\alpha \tau^i_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.2.9}$$

となる．

この X_T が運動の生成演算子であり，位相空間の全ハミルトン関数 H_T と (8.2.2) の ${}_*X_T$ に対応するものである．そして，(9.2.9) の中の未定関数 u^α の項を分離して

$$Z_\alpha \equiv -\tau^i_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^i} \tag{9.2.10}$$

とおく．ところが Z^α は位相空間では恒等的に消えるのである．なぜならば，Z^α を位相空間に移すと，

$$
{}_*Z_\alpha = -\tau^i_\alpha \frac{\partial p^j}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{\partial p_j} = -\tau^i_\alpha A_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j} = 0 \tag{9.2.11}
$$

となるからである．**この性質は，位相空間における 1 次拘束が速度位相空間では恒等的に消える $\boldsymbol{\Phi^1_\alpha(q,p(q,\xi)) \equiv 0}$ という性質（3.4 節，8.2 節参照）の逆である．** 1 次拘束が速度位相空間で消えてしまうので，そこでは 1 次拘束は存在せず，運動方程式から (9.2.3) の 2 次拘束 Φ^2_α が導かれた．したがって，**速度位相空間では 1 次拘束の代りに $\boldsymbol{Z^\alpha}$ 項が現われたわけである．そして，その $\boldsymbol{Z^\alpha}$ は位相空間では消えて，代りに $\boldsymbol{{}_*\Phi^1_\alpha}$ が現われるという構造になっている．**

では未定関数 u^α は何によって決められるのか．位相空間での定式化の場合に，7.1 節で行ったように H_T の中の v^α は，1 次拘束条件 ${}_*\Phi^1_\alpha$ の定常条件によって決められた（ただし第 1 類拘束の係数 v^α は任意関数のまま残る）．その方法に対応して X_T と Z^α との交換子積 $[X_T, Z_\alpha]$ を用いて決めていくのである．その計算の前に，Z_α 同士の交換子積を求めておく．

$$
\begin{aligned}
[Z_\alpha, Z_\beta] &= \tau^i_\alpha \frac{\partial \tau^j_\beta}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{\partial \xi^j} - \tau^j_\beta \frac{\partial \tau^i_\alpha}{\partial \xi^j}\frac{\partial}{\partial \xi^i} \\
&= \left(\tau^i_\alpha \frac{\partial \tau^j_\beta}{\partial \xi^i} - \tau^i_\beta \frac{\partial \tau^j_\alpha}{\partial \xi^i}\right)\frac{\partial}{\partial \xi^j}
\end{aligned} \tag{9.2.12}
$$

となるが，左辺は (9.2.11) によると位相空間では消えるから，右辺もゼロでなければならない．右辺の表式は $(\qquad)^j\partial/\partial\xi^j$ の型であり，それが位相空間で消えるのであるから，Z_α の 1 次結合でなければならない．よって

$$
[Z_\alpha, Z_\beta] \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(Z_\gamma) \tag{9.2.13}
$$

となる．このように Z_α は変換子積に対して閉じている．

Z_α が閉じて u^α は任意であるから，(9.2.9) の X_T の中の Z 項を取り出し，運動方程式の生成系として

$$
\left.
\begin{aligned}
X_t &= \eta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t}, \\
Z_\alpha &= -\tau^i_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^i}
\end{aligned}
\right\} \tag{9.2.14}
$$

をとることができる．5.2 節で運動方程式の積分可能条件について説明したように，この生成系が閉じていればこれだけでよいが，一般には閉じてなく，新たな生成子が現われる．実際に，

$$[X_t, Z_\alpha] = \tau^i_\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\tau^j_\alpha \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} - \eta^j \frac{\partial \tau^i_\alpha}{\partial \xi^j} - \xi^j \frac{\partial \tau^i_\alpha}{\partial q^j} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^i} \equiv Y^1_\alpha \tag{9.2.15}$$

とおくと，Y^1_α は X_t, Z_α と独立である．

ところが，この Y^1_α は，後に証明するように，位相空間に移すと 1 次拘束 ${}_*\Phi^1_\alpha$ からつくられる生成子

$${}_*Y^1_\alpha = \frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \tag{9.2.16}$$

なのである．したがって，Y^1_α は 1 次拘束条件 Φ^1_α に対応するものである．それゆえ，Y^1_α を X_t に加えたものが，全ハミルトン関数 H_T に対応する生成子になる．そこで改めて

$$X_T \equiv \eta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^\alpha Y^1_\alpha + u^\alpha Z_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.2.17}$$

を運動の生成演算子としよう．

２次以上の拘束条件を導く演算処方は，(8.2.20) に対応して，(9.2.3) で与えられる２次拘束 Φ^2_α とその定常条件である．Φ^2_α の定常条件から逐次

$$\Phi^{k+1}_\alpha = X_T \Phi^k_\alpha, \quad (k = 2 \sim K) \tag{9.2.18}$$

$$\dot{\Phi}^{K+1}_\alpha \equiv X_T \Phi^K_\alpha = C^\beta_{\alpha k} \Phi^k_\beta \tag{9.2.19}$$

と定義する．(9.2.19) は Φ^K_α より高次の拘束条件は生じないことを表す．

第 1 類拘束条件のみ現われる系ではこれで問題はない．しかし，ここで注意すべきことは，Y^1_α の中に，第 2 類拘束に相当する Y^1_s があれば，

$$Y^1_s \Phi^k_{s'} \not\approx 0$$

となるものが存在して，v^s がきまるので (9.2.18) の系列は止まるということである．そして

$$X_t \Phi^k_{s'} + v^s Y^1_s \Phi^k_{s'} \approx 0 \tag{9.2.20}$$

から，v^s が決定される．v^s を決めるもう一つの条件がある．それは

$$\left[Y^1_s, Y^1_{s'} \right] \not\equiv 0 \quad \mathrm{mod}(Y^1) \tag{9.2.21}$$

となる Y_s^1 は第 2 類拘束に対応する演算子であるから，

$$\left[X_T, Y_s^1\right] \approx 0 \tag{9.2.22}$$

によって X_T の中の v^s が決まる*)．

v^s を決める手続きは，7.1 節で行った方法と本質的には同じである．第 1 類拘束に対応する Y_α^1 の係数因子 v^α は任意のまま残る．したがって，

$$\begin{aligned} X_T &= \eta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^s Y_s^1 + v^\alpha Y_\alpha^1 + u^\alpha Z_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \\ &\equiv X_t^* + v^\alpha Y_\alpha^1 + u^\alpha Z_\alpha \end{aligned} \tag{9.2.23}$$

となる．v^s は定まった関数であり，X_t^* は 7.1 節の H^* に対応する運動の生成子である．

運動方程式 (9.2.5)（または (9.2.6)）および (9.2.7) の積分可能条件（整合性条件）は

$$\left.\begin{aligned} &\langle \theta^i, X_T \rangle \approx 0 \\ &X_T \Phi_\alpha^k \approx 0, \quad (k = 2 \sim K) \end{aligned}\right\} \tag{9.2.24}$$

となる．$\langle \rho^i, X_T \rangle \approx 0$ は自動的に満される．また Z_α も，(9.2.5) および (9.2.7) と直交することは明らかである**)．

9.3 位相空間における定式化との対応

位相空間での定式化は 8.2 節と 8.4 節で行ったが，それと，前節の速度位相空間での定式化との対応関係を見よう．

そのために，まず運動の生成子と 1 次拘束条件について両空間における対応の考察から始める．9.1 節で述べたように，速度位相空間の微分演算子は位相空間へ (9.1.9) によってスムーズに写像される．そこで (9.2.14) の X_t を位相空間に変換した ${}_*X_t$ を求める．(9.1.9) により

$$X_t = \eta^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + u^\alpha Z_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \to \eta^i A_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} + \xi^i \left(\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$$

注*）(9.3.10) の下の（注*）を参照．また，位相空間では ${}_*Z_\alpha$ がゼロであるから，$Z_\alpha \Phi_\beta^k$ は $\mathrm{mod}(Z_\alpha)$ でゼロとなる．それゆえ，Z_α は (9.2.18) ～ (9.2.20) では効かない．

注**）Z_α は位相空間に変換するとゼロである．$\Phi_\alpha^k(q,\xi)$ が位相空間に変換されて ${}_*\Phi_\alpha^k(q,p)$ が存在すれば ${}_*Z_{\alpha *}\Phi_\alpha^k \equiv 0$ ゆえ，$Z_\alpha \Phi_\alpha^k \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(Z_\alpha)$ である．後に示すように ${}_*\Phi_\alpha^k(q,p)$ は存在する．

この第 1 項は (9.2.4) により

$$\eta^i A_{ij} \approx S_j = -\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\xi^k + \frac{\partial L}{\partial q^j} \tag{9.3.1}$$

であるから，

$$X_t \to \frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \xi^i \frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.3.2}$$

となる．他方，拘束条件は弱等式なので，すべての q^i, p_i は独立であるかのように扱って，通常のハミルトン関数の定義式 $H = p_i\xi^i - L$ から

$$dH = \xi^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i \tag{9.3.3}$$

をえる．これより

$$\xi^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial H}{{}_*\partial q^i} \tag{9.3.4}$$

である．この表式を (9.3.2) に代入すると

$$\begin{aligned} X_t \to {}_*X_t &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} - \frac{\partial H}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial t} \\ &= {}_*X_H + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

をえる．これは正に (8.2.2) の ${}_*X_T$ において H_T を H としたものである．これで X_T の中の X_t の変換が求まったので，次に Y^1_α の変換を求める．

(9.2.15) を書き変えて

$$\begin{aligned} Y^1_\alpha =& \tau^i_\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} - \left(Z_\alpha \eta^i + X_t \tau^i_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial \xi^i} \to \\ &\to \tau^i_\alpha \left(\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} + \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) + \left(\tau^j_\alpha \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} - X_t \tau^i_\alpha\right) A_{ik}\frac{\partial}{\partial p_k} \end{aligned}$$

この右辺の $\partial/\partial p_k$ の係数因子を求めよう；$A_{ij}\tau^j = 0$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_k}\text{の係数} &= \tau^i_\alpha \frac{\partial p_k}{\partial q_i} + \tau^j_\alpha A_{ik}\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^j} - A_{ik} X_t \tau^i_\alpha \\ &= \tau^j_\alpha \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} + \frac{\partial\left(A_{ik}\eta^i\right)}{\partial \xi^j} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial \xi^j}\eta^i + X_t A_{jk} \right\} \end{aligned}$$

ここで (9.2.4) および，$\partial A_{ik}/\partial\xi^j = \partial A_{jk}/\partial\xi^i$ を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
&\approx \tau_\alpha^j \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} + \frac{\partial S_k}{\partial \xi^j} - \frac{\partial A_{ik}}{\partial \xi^j}\eta^i + \eta^i \frac{\partial A_{jk}}{\partial \xi^i} + \xi^i \frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i} \right\} \\
&= \tau_\alpha^j \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial \xi^j}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q^i}\xi^i \right) + \xi^i \frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i} \right\} \\
&= \tau_\alpha^j \left\{ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} + \frac{\partial p_j}{\partial q^k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right\} = \tau_\alpha^j \frac{\partial p_j}{\partial q^k} = -\frac{\partial_* \Phi_\alpha^1}{{}_*\partial q^k}
\end{aligned}
$$

となる．上式で $\partial p_k/\partial\xi^j = A_{jk}$ と (8.2.76) を用いた．よって，(9.2.3) の $\Phi_\alpha^2 \approx 0$ のもとで

$$
Y_\alpha^1 \to \tau^i \frac{\partial}{{}_*\partial q^i} - \frac{\partial_*\Phi_\alpha^1}{{}_*\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k} = \frac{\partial_*\Phi_\alpha^1}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial_* q^i} - \frac{\partial_*\Phi_\alpha^1}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} = {}_*X_{\Phi_\alpha^1} \tag{9.3.6}
$$

と変換される．それゆえ，Y_α^1 は位相空間での 1 次拘束 ${}_*\Phi_\alpha^1$ に対応する微分演算子であることが証明された．ここで

$$
Y_\alpha^1 \to {}_*X_{\Phi_\alpha^1} = {}_*Y_\alpha^1 \tag{9.3.7}
$$

と表すことにする．また，Z_α の変換は (9.2.10) で示したように ${}_*Z_\alpha = 0$ である．

結局，(9.2.23) の X_T は (9.3.5) と合せて次の対応関係がえられる；

$$
X_T = X_t + v^\alpha Y_\alpha^1 + u^\alpha Z_\alpha \to {}_*X_T = {}_*X_t + v^\alpha {}_*Y_\alpha^1 = {}_*X_H + v^\alpha {}_*X_{\Phi_\alpha^1} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.3.8}
$$

${}_*X_T$ によって生成される運動方程式は

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot q^i &= \xi^i = {}_*X_T q^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + v^\alpha \frac{\partial_*\Phi_\alpha^1}{\partial p_i} \approx \frac{\partial H_T}{\partial p_i} \\
\dot p^i &= {}_*X_T p_i = -\frac{\partial H}{{}_*\partial q^i} - v^\alpha \frac{\partial_*\Phi_\alpha^1}{{}_*\partial q^i} \approx -\frac{\partial H_T}{{}_*\partial q^i}
\end{aligned}
\right\} \tag{9.3.9}
$$

である．

また，拘束条件 ${}_*\Phi_\alpha^k$ に関する定常性の条件は，(9.2.18) に対応して

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}_*X_T {}_*\Phi_\alpha^k = \left\{ {}_*\Phi_\alpha^k, H_T \right\} = {}_*\Phi_\alpha^{k+1}, \quad (k = 1 \sim K-1) \\
&{}_*X_T {}_*\Phi_\alpha^K = C_{\alpha k}^\beta {}_*\Phi_\beta^k
\end{aligned}
\right\} \tag{9.3.10}
$$

である．(9.3.10) によって，${}_*X_T$ あるいは H_T の中の第 1 類拘束 ${}_*\Phi_s^1$ の係数が決定されることは 8.4 節ですでに述べた通りである．

(9.3.10) で ${}_*\Phi^1_\alpha$ から逐次定義された ${}_*\Phi^k_\alpha(k \geq 2)$ は (9.2.18) の Φ^k_α に対応していることは，${}_*\Phi^1_\alpha \leftrightarrow Y^1_\alpha, {}_*X_T \leftrightarrow X_T$ の対応があるので明らかであろう*)．

以上は速度位相空間から位相空間への変換（写像）である．すでに前にも述べたが，**微分演算子 $\boldsymbol{X_f}$ の ${}_*\boldsymbol{X_f}$ への変換は常に可能であったが，逆は必ずしも可能でない．その理由の一つは速度位相空間では 1 次拘束は $\boldsymbol{\Phi^1_\alpha \equiv 0}$ であるからである．そこで位相空間からの変換 ${}_*\boldsymbol{X_f} \rightarrow \boldsymbol{X_f}$ が存在するための条件を調べよう**．この条件を明らかにしておかないと，両空間の対応関係が不明瞭で，速度位相空間と位相空間での定式化が同等であるか否かわからない．

まず位相空間での微分演算子 ${}_*X_f$ の速度位相空間への変換 X_f を考える．

$$ {}_*X_f = \frac{\partial_* f}{\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i} - \frac{\partial_* f}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{9.3.11} $$

を (9.1.9) を用いて書き変えると

$$ {}_*X_f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \left\{\frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{9.3.12} $$

ヘシアン行列 A_{ij} が非正則のため，速度位相空間内では $\partial/\partial p_i$ は正則でない．ところが，上式の $\{\quad\}$ の中の式に対して，すべての τ^i_α について次の条件

$$ \tau^i_\alpha\left\{\frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\right\} = 0, \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{9.3.13} $$

が満されていると，$\{\quad\}$ の中は A_{ij} の 1 次結合で表されるから，次式で定義される $f^j_1(q,\xi)$ が存在する；

$$ -\left\{\frac{\partial f}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\right\}(q, p(q,\xi)) = A_{ij}f^j_1(q,\xi) \tag{9.3.14} $$

上式左辺の p_i はすべて $p_i(q,\xi)$ で表すことを意味する．すると速度位相空間での X_f が存在して，次のように表される．

$$ X_f = f^i_1\frac{\partial}{\partial \xi^i} + f^i_2\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{9.3.15} $$

注*）ただし，(9.2.22) で v^s を決めるとき注意しなければならないことがある．(4.2.16) によって $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ であるが，$\{f,g\} =$ 定数のとき $X_{\{f,g\}} = 0$ である．よって $\left[Y^1_\alpha, Y^1_\beta\right] = 0$ だからといって Y^1_α は必ずしも第 2 類ではないと断定できないのである．$\left\{{}_*\Phi^1_\alpha, {}_*\Phi^1_\beta\right\} =$ 定数のとき Y^1_α, Y^1_β は第 2 類である．それゆえ，第 1 類と第 2 類の分類はポアソン括弧に戻って確かめねばならない．この点だけは位相空間と速度位相空間との対応がつかない．そして，微分演算子を用いざるをえない速度位相空間における定式化の欠陥である．しかし，物理的に興味のない瑣末な例を除き，通常の力学系ではそのようなことはほとんど起こらない．

ここに，

$$f_2^i \equiv \frac{\partial f}{\partial p_i}(q, p(q,\xi)) \tag{9.3.16}$$

とする．f_1^i, f_2^i ともに，f によって定まる q, p の関数である．

この結果からわかるように条件式 (9.3.13) は位相空間の微分演算子 ${}_*X_f$ を速度位相空間での X_f に変換（写像）しうるための条件である．(9.3.13) は (8.2.76), (8.2.77) および (9.1.9) を用いて位相空間にもどすと次のようになる；

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right) + \frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial f}{\partial p_j} \\
&\quad = \frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial_* f}{{}_*\partial q^i} - \frac{\partial_* \Phi^1_\alpha}{{}_*\partial q^j}\frac{\partial_* f}{\partial p_j} = \left\{{}_*\Phi^1_\alpha, {}_* f\right\} \approx 0
\end{aligned}$$

結局*)，位相空間で

$$\left\{{}_*\Phi^1_\alpha, {}_*f\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1), \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{9.3.17}$$

が，${}_*X_f \to X_f$ が存在する十分条件である．上式で $\mathrm{mod}({}_*\Phi^1)$ は速度位相空間ではゼロなので位相空間で現われる．

f として ${}_*\Phi^1_\beta$ をとると

$$\left\{{}_*\Phi^1_\alpha, {}_*\Phi^1_\beta\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2), \quad (\alpha = 1 \sim R) \tag{9.3.18}$$

が，${}_*Y^1_\beta = {}_*X_{\Phi^1_\beta} \to Y^1_\beta$ なる Y^1_β が存在するための十分条件である．第 1 類の ${}_*\Phi^1_\beta$ は常に上式を満すが，第 2 類拘束の場合は満されない．しかし，(9.3.6) の上で示したように，$\Phi^2_\beta \approx 0$ のもとで，すべての $Y^1_\beta \to {}_*Y^1_\beta$ が存在する．さらに，その証明を逆にたどることもできるから，${}_*Y^1_\beta \to Y^1_\beta$ も可能である．よって，${}_*\Phi^2_\beta \approx 0$ とともに，${}_*Y^1_\beta$ の写像 Y^1_β は存在することになる**)．

また，X_T は $\Phi^2_\alpha \approx 0$ のもとで構成されたので，${}_*X_T = {}_*X_{H_T} \to X_T$ が存在するためには

$$\left\{H_T, {}_*\Phi^1_\alpha\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2) \tag{9.3.19}$$

注*）(9.3.13) が弱等式 $\Phi^2_\alpha \approx 0$ のもとで成立つとき，(9.3.17) は $\mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2)$ となる．本節では (9.2.3) で $\Phi^2 \approx 0$ を前提として X_t の η^i を導いているので (9.3.18), (9.3.19) のようになる．

注**）(8.2.17) の演算で ${}_*\Phi^2_\beta$ を定義することからわかるように，${}_*\Phi^2_\beta$ が存在するということは，${}_*\Phi^1_\beta$ は (9.3.18) を満しているわけである．もし満さなければ，H_T の中の v^β がきまり，${}_*\Phi^2_\beta$ は現われないからである．

となる．この式は ${}_*\Phi^1_\alpha$ の定常条件により当然満されているから，${}_*X_T \to X_T$ は存在し，(9.2.17) となる．

さらに，ゲージ変換の母関数 ${}_*G(\epsilon)$，および大域的変換を含む変換の母関数 ${}_*\tilde{G}$ はそれらの定常条件 (8.2.23) および (8.4.10) により (9.3.17) を満すので，${}_*X_G \to X_G$ は存在する．

最後に位相空間における拘束条件の整合性条件

$$\left.\begin{aligned} {}_*\Phi^{k+1}_\alpha &= \left\{{}_*\Phi^k_\alpha, H_T\right\}, \quad (k = 1 \sim K-1), \\ {}_*\dot{\Phi}^K_\alpha &= \left\{{}_*\Phi^K_\alpha, H_T\right\} = {}_*C^\beta_{\alpha k *}\Phi^k_\beta \end{aligned}\right\} \tag{9.3.20}$$

を速度位相空間に移そう．速度位相空間ではポアソン括弧は使えないから，微分演算子の形式に上式を書き換えよう．そのために，(4.2.16) の公式

$$[{}_*X_f, {}_*X_g] = {}_*X_{\{f,g\}} \tag{9.3.21}$$

を用いる．この公式により (9.3.20) は

$$\left.\begin{aligned} {}_*Y^{k+1}_\alpha &= \left[{}_*X_{H_T}, {}_*Y^k_\alpha\right], \quad (k = 1 \sim K-1) \\ \left[{}_*X_{H_T}, {}_*Y^K_\alpha\right] &\approx {}_* C^\beta_{\alpha k *}Y^k_\beta \end{aligned}\right\} \tag{9.3.22}$$

となる．ただし，上式右辺で ${}_*\Phi^k_\beta X_{C^\beta_{\alpha k}} \approx 0$ を落した．ところで，${}_*Y^1_\alpha \leftrightarrow Y^1_\alpha$ と ${}_*X_{H_T} = {}_*X_T \leftrightarrow X_T$ は，すでに (9.3.6) と (9.3.8) で与えられているので，(9.3.22) は ${}_*\Phi^k_\alpha \approx 0$ のもとで次のようになる；

$$\left.\begin{aligned} Y^{k+1}_\alpha &\equiv \left[X_T, Y^k_\alpha\right], \quad (k = 1 \sim K-1) \\ \left[X_T, Y^K_\alpha\right] &= C^\beta_{\alpha 0} Z_\beta + C^\beta_{\alpha k} Y^k_\beta \end{aligned}\right\} \tag{9.3.23}$$

上式で注意すべきは，右辺に Z_β 項が現われたことである（${}_*Z_\beta \equiv 0$ だから）．

この (9.3.22) と (9.3.23) を用いると（第 1 類拘束のみ存在する場合）

$${}_*X_G = \frac{\partial_* G}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial_* G}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} = \epsilon^\alpha_{k*}Y^k_\alpha +_* \Phi^k_{\alpha *}X_{\epsilon^\alpha_k}, \tag{9.3.24}$$

$$X_G = \epsilon^\alpha_0 Z_\alpha + \epsilon^\alpha_k Y^k_\alpha + \Phi^k_\alpha X_{\epsilon^\alpha_k} \tag{9.3.25}$$

と表される．ただし，${}_*X_{\epsilon^\alpha_k} \to X_{\epsilon^\alpha_k}$ の存在は仮定した．

そして，G の定常条件は速度位相空間で

$$[X_T, X_G] \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(Z_\alpha) \tag{9.3.26}$$

となる．X_T の中の v^α は任意であるから，上式の X_T は X_t としてよい．これより (8.2.26) に対応して

$$\dot{\epsilon}_k^\alpha + \epsilon_{k-1}^\alpha + \epsilon_K^\beta C_{\beta k}^\alpha = 0, \quad (k = 1 \sim K) \tag{9.3.27}$$

をえる．ここに $\dot{\epsilon}_k^\alpha = X_t \epsilon_k^\alpha$ である．ϵ_K^α を与えれば $\epsilon_k^\alpha (k < K)$ はこの式で逐次求まる．

これで，速度位相空間と位相空間における定式化の相互関係と，その対応が可能であるための条件がわかった．

速度位相空間での微小ゲージ変換は

$$\delta q^i = X_G q^i, \quad \delta \xi^i = X_G \xi^i \tag{9.3.28}$$

で与えられる．ところがこれに関して後に述べるように問題が生ずる場合がある．$\xi^i = \dot{q}^i$ であるから，上式のゲージ変換は

$$\delta \xi^i = \frac{d}{dt} \delta q^i \tag{9.3.29}$$

を満すべきであるが，δq^i が ξ^j に依存するとき，つまり位相空間で ${}_*G$ が p_i の 2 次以上の項を含むとき，(9.3.29) は一般的には満されないのである（後述）．

例題 9.1.

さきに位相空間でゲージ変換の母関数 ${}_*G$ を求めた例題 8.1 を再び取りあげる．

$$L = \frac{1}{2}(\xi^1 - q^2)^2 + \frac{1}{2}(\xi^2 - q^3)^2 \tag{9.3.30}$$

ラグランジュ方程式は

$$\dot{\xi}^1 - \xi^2 = 0, \quad \dot{\xi}^2 - \xi^3 + \xi^1 - q^2 = 0, \quad -\xi^2 + q^3 = 0. \tag{9.3.31}$$

ヘシアン行列 A_{ij} と τ^i は

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^i = (0, 0, 1) \tag{9.3.32}$$

である．A_{ij} の階数は 2 ゆえ，1 次拘束は 1 個のみ．運動量は

$$p_1 = \xi^1 - q^2, \quad p_2 = \xi^2 - q^3, \quad p_3 = 0 \tag{9.3.33}$$

ラグランジュ方程式の第 3 式は 2 次拘束条件で，位相空間との対応は

$$\Phi^2 = -\xi^2 + q^3 \approx 0 \to {}_*\Phi^2 = p_2 \approx 0$$

である．(9.2.14) により S_i は

$$S^i = (\xi^2, \xi^3 - \xi^1 + q^2, \xi^2 - q^3) \tag{9.3.34}$$

となり，この S^i と A_{ij} とから (9.2.4) により

$$\eta^i = \left(\xi^2, \xi^3 - \xi^1 + q^2, \text{任意}\right) \tag{9.3.35}$$

をえる．これを (9.2.14) に代入して

$$X_t = \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \left(-\xi^1 + \xi^3 + q^2\right) \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + u \frac{\partial}{\partial \xi^3} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.3.36}$$

および，$Z = -\partial/\partial\xi^3$ をえる．

(9.3.36) と Z を用いると，(9.2.15) より

$$Y^1 \equiv [X_t, Z] = \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial q^3} \tag{9.3.37}$$

をえる．これを X_t に加えて，運動の生成子は次式となる；

$$X_T = X_t + vY^1 + uZ. \tag{9.3.38}$$

さらに，

$$\left.\begin{aligned} Y^2 &\equiv \left[X_t, Y^1\right] = -\frac{\partial}{\partial \xi^1} - \frac{\partial}{\partial q^2}, \\ Y^3 &\equiv \left[X_t, Y^2\right] = \frac{\partial}{\partial q^1}, \\ Y^4 &\equiv \left[X_t, Y^3\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.3.39}$$

拘束条件に対応する Y^k は $Y^1 \sim Y^3$ で，それ以上は現われない．

これら Z, Y^k を位相空間に変換しよう．当然ながら ${}_*Z = 0$．変換操作 (9.1.9) により

$$\left.\begin{aligned} Y^1 &\to {}_*Y^1 = \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{{}_*\partial q^3} - \frac{\partial}{\partial p_2} = \frac{\partial}{{}_*\partial q^3} \\ Y^2 &\to {}_*Y^2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial}{{}_*\partial q^2} - \frac{\partial}{\partial p_1} = \frac{\partial}{{}_*\partial q^2} \\ Y^3 &\to {}_*Y^3 = \frac{\partial}{{}_*\partial q^1} \end{aligned}\right\} \tag{9.3.40}$$

さらに，X_t を ${}_*X_t$ に変換すると

$$
{}_*X_t = -p_1\frac{\partial}{\partial p_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_3} + \left(p_1+q^2\right)\frac{\partial}{\partial_* q^1} + \left(p_2+q^3\right)\frac{\partial}{\partial_* q^2} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.3.41}
$$

をえる*)．この ${}_*X_t$ は (8.2.32) の H に対応する ${}_*X_H$(9.3.5) である．

(9.3.40) の ${}_*Y^k$ とこの ${}_*X_t$ は (9.3.22) を満していることは容易に確められる．

ゲージ変換の生成子 X_G は (9.3.25) および (9.3.27) から

$$
\left.\begin{array}{l}
X_G = \epsilon_0 Z + \epsilon_1 Y^1 + \epsilon_2 Y^2 + \epsilon_3 Y^3, \\
\dot{\epsilon}^k + \epsilon^{k-1} = 0, \quad (k = 1 \sim 3).
\end{array}\right\} \tag{9.3.42}
$$

よって，$\epsilon_3 \equiv \epsilon$, $\epsilon_2 = -\dot{\epsilon}$, $\epsilon_1 = \ddot{\epsilon}$, $\epsilon_0 = -\dddot{\epsilon}$ となり

$$
X_G = +\dddot{\epsilon}\frac{\partial}{\partial \xi^3} + \ddot{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial q^3}\right) + \dot{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial q^2}\right) + \epsilon\frac{\partial}{\partial q^1} \tag{9.3.43}
$$

をえる．この X_G に対応する ${}_*X_G$ は

$$
X_G \to {}_*X_G = \epsilon_{1*}Y^1 + \epsilon_{2*}Y^2 + \epsilon_{3*}Y^3 = \ddot{\epsilon}\frac{\partial}{{}_*\partial q^3} + \dot{\epsilon}\frac{\partial}{{}_*\partial q^2} + \epsilon\frac{\partial}{{}_*\partial q^1} \tag{9.3.44}
$$

である．

これより

$$
\left.\begin{array}{l}
\delta q^i = X_G q^i =_* X_G q^i \to \delta q^1 = \epsilon, \ \ \delta q^2 = \dot{\epsilon}, \ \ \delta q^3 = \ddot{\epsilon} \\
\delta \xi^i = X_G \xi^i = \frac{d}{dt}\delta q^i
\end{array}\right\} \tag{9.3.45}
$$

をえる．また

$$
\delta p_i = {}_*X_G p_i = 0
$$

であるが，この結果は (9.3.33) の p_i の定義および (9.3.45) の δq^i と整合的である．

最後に，このゲージ変換により $\delta L = 0$ となることは明らかである．これらの結果は例題 8.1 と一致している．

注*）X_t から ${}_*X_t$ へ移行するとき，$\eta_i\frac{\partial}{\partial \xi^i} \to \eta^i A_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}$ として (9.3.1) を用い，(9.3.2) としなければならない．(9.3.36) の X_t では $\eta^3\partial/\partial\xi^3$ を $u\partial/\partial\xi^3$ にくり入れたが，(9.3.41) では $\eta^3\partial/\partial\xi^3$ を復活させて $S_3\partial/\partial p_3 = p_2\partial/\partial p_3$ を ${}_*X_t$ に入れなければならない．

例題 9.2.　電磁場

これも例題 8.2 で，位相空間におけるゲージ変換の母関数を導いた．それと対応させて，速度位相空間での定式化を本節の処方で行う．

$$L=\int d^3x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right],\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{9.3.46}$$

ラグランジュ方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=0,\quad (\mu,\nu=0\sim3) \tag{9.3.47}$$

この 4 つの方程式のうち，$\nu=0$ の式は，$F^{00}\equiv 0$ ゆえ

$$\partial_i F^{i0}=0\rightarrow\partial_i\partial^i A_0-\partial^i\xi_i=0 \tag{9.3.48}$$

であり，この式は時間微分を 1 階までしか含まないので 2 次拘束 Φ^2 である．正準運動量は

$$\pi^i=F^{0i}=\xi^i-\partial^i A^0,\ \ \pi^0=0. \tag{9.3.49}$$

したがって，(9.3.48) は

$$\left.\begin{aligned}&\Phi^2=\partial_i F^{i0}\approx0\rightarrow{}_*\Phi^2=\partial_i\pi^i=0.\\ \text{1 次拘束は}\quad&{}_*\Phi^1=\pi^0=0\end{aligned}\right\} \tag{9.3.50}$$

である．

ヘシアン行列 $A^{\mu\nu}$ は

$$A^{\mu\nu}=(g^{\mu0}g^{\nu0}-g^{\mu\nu})\delta(x-x') \tag{9.3.51}$$

と表される．$A^{\mu\nu}$ の階数は 3 であるから，1 次拘束条件は 1 つのみである．

$$\tau_\nu=g^{\nu0}\sim(1,0,0,0)$$

(9.2.4) に対応して，

$$S^\mu=\left(\partial^i\xi_i-\partial_i\partial^i A_0,\ \partial_1\xi_0-\partial^i F_{i1},\ \partial_2\xi_0-\partial^i F_{i2},\ \partial_3\xi_0-\partial^i F_{i3}\right)\approx A^{\mu\nu}\eta_\nu \tag{9.3.52}$$

(9.3.51) と (9.3.52) より

$$S^0\approx0,\quad S^i\approx\eta_i.$$

となる．よって

$$\eta_0 : 任意, \quad \eta_i = \partial_i \xi_0 - \partial^j F_{ji} \tag{9.3.53}$$

である．これにより

$$X_t = \int d^3x \left[\left(\partial_i \xi_0(x) - \partial^j F_{ji}(x) \right) \frac{\delta}{\delta \xi_i(x)} + \xi_\mu(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.3.54}$$

$$Z = -\frac{\delta}{\delta \xi_0(x)} \tag{9.3.55}$$

をえる．

この X_t と Z より Y^1 を求めると

$$\begin{aligned} Y^1 = [X_t, Z(x)] &= \int d^3x' \left[\partial_i' \delta(x - x') \frac{\delta}{\delta \xi_i(x')} + \delta(x - x') \frac{\delta}{\delta A_0(x')} \right] \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta A_0(x)} - \partial_i \frac{\delta}{\delta \xi_i(x)} \right) \end{aligned} \tag{9.3.56}$$

をえる．さらに

$$Y^2 = \left[X_t, Y^1(x) \right] = \partial_i \frac{\delta}{\delta A_i(x)} \tag{9.3.57}$$

$\left[X_t, Y^2 \right] = 0$ であるから，これ以上 Y^k はない．

これら Y^1, Y^2 を位相空間に変換し，${}_*Y^1, {}_*Y^2$ を求めよう．(9.1.9) を用いて

$$\begin{aligned} Y^1 \to& \int d^3x' \left(\frac{\delta}{{}_*\delta A_0(x)} + \frac{\partial \pi^i(x')}{\delta A_0(x)} \frac{\delta}{\delta \pi^i(x')} - \partial_i \frac{\partial \pi^j(x')}{\delta \xi_i(x)} \frac{\delta}{\delta \pi^j(x')} \right) \\ &= \left[\frac{\delta}{{}_*\delta A_0(x)} + \partial^i \frac{\delta}{\delta \pi^i(x)} - \partial_i \frac{\delta}{\delta \pi^i(x)} \right], \\ \therefore \quad {}_*Y^1 &= \frac{\delta}{{}_*\delta A_0}, \end{aligned} \tag{9.3.58}$$

$$Y^2 \to \partial_i \frac{\delta}{{}_*\delta A_i(x)} = {}_*Y^2 \tag{9.3.59}$$

これら ${}_*Y^1$ と ${}_*Y^2$ は，それぞれ (9.3.50) の ${}_*\Phi^1$ と ${}_*\Phi^2$ に正しく対応している．

最後に，ゲージ変換の生成演算子は (9.3.25)，(9.3.26) により

$$\left. \begin{aligned} &X_G = \int d^3x \left(\epsilon_0 Z + \epsilon_1 Y^1 + \epsilon_2 Y^2 \right), \\ &\epsilon_0 + \dot{\epsilon}_1 = 0, \quad \epsilon_1 + \dot{\epsilon}_2 = 0. \end{aligned} \right\} \tag{9.3.60}$$

よって，$\epsilon_2 \equiv -\epsilon(x)$ とおいて

$$X_G = \int d^3x \left[\ddot{\epsilon} \frac{\delta}{\delta \xi_0} + \dot{\epsilon} \left(\frac{\delta}{\delta A_0} - \partial_i \frac{\delta}{\delta \xi_i} \right) - \epsilon \partial_i \frac{\delta}{\delta A_i} \right]$$
$$= \int d^3x \left[\partial_\mu \epsilon(x) \cdot \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \partial_\mu \dot{\epsilon}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_\mu} \right] \tag{9.3.61}$$

となる．この X_G によりゲージ変換として

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon(x), \quad \delta \xi_\mu = \partial_\mu \dot{\epsilon}(x) \tag{9.3.62}$$

をえる．

位相空間の ${}_*X_G$ は (9.3.58) と (9.3.59) より

$${}_*X_G = \int d^3x \left(\dot{\epsilon} \frac{\delta}{{}_*\delta A_0} - \epsilon \partial_i \frac{\delta}{{}_*\delta A_i} \right) = \int d^3x \partial_\mu \epsilon \cdot \frac{\delta}{{}_*\delta A_\mu} \tag{9.3.63}$$

となる．これらの結果は，例題 8.2 と整合していることは明らかである．

例題 9.3.　ヤン-ミルス場

これも例題 8.3 で取りあげた．ヤン-ミルス場について X_G や Y_α^k の求め方は，電磁場と本質的に同じであるから，詳しい計算は省略して筋道のみ記すことにする．

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_\alpha, \quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^a_{bc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{9.3.64}$$

ヘシアン行列と τ^i は

$$A^{\mu\nu}_{ab}(x, x') = \delta_{ab} \left(g^{\mu 0} g^{\nu 0} - g^{\mu\nu} \right) \delta(x - x'), \quad (\tau_a)^b_\mu = \delta^b_a g_{\mu 0} \tag{9.3.65}$$

$$S^\mu_a \approx A^{\mu\nu}_{ab} \eta^b_\nu = \eta^a_0 g^{\mu 0} - \eta^a_\nu g^{\mu\nu}$$
$$= g^{\mu i} \left(\partial^0 D^a_{bi} A^b_0 + g f^a_{bc} A^b_0 F^{c0}_i - D^a_{bj} F^{bj}_i \right) - g^{\mu 0} D^a_{bi} F^{bi}_0 \tag{9.3.66}$$

ここに

$$D^a_{b\mu} = \delta^a_b \partial_\mu - g f^a_{bc} A^c_\mu$$

正準運動量は

$$\pi^\mu_a = F^{0\mu} \to \pi^0_a = 0, \ \pi^i_a = -\xi^a_i + \partial_i A^a_0 - g f^a_{bc} A^b_0 A^c_i \tag{9.3.67}$$
$$\therefore \quad {}_*\Phi^1_a = \pi^0_a$$

(9.3.66) に $\tau^b_{a\mu}$ を乗じて，

$$\Phi^2_a = \tau^b_{a\mu} S^\mu_b = D^a_{bi} F^{bi}_0 = D^a_{bi}\pi^{ib} \approx 0 \tag{9.3.68}$$

をえる．また，

$$\eta^a_0 : \text{任意}, \quad \eta^a_i = \partial^0 D^a_{bi} A^b_0 + g f^a_{bc} A^b_0 F^{c0}{}_i - D^a_{bj} F^{bj}{}_i \tag{9.3.69}$$

である．そして，

$$X_t = \int d^3x \left[\eta^a_i \frac{\delta}{\delta \xi^a_i} + \xi^a_\mu \frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + u^a Z_a \right] + \frac{\partial}{\partial t} \tag{9.3.70}$$

$$Z_a = -\frac{\delta}{\delta \xi^a_0} \tag{9.3.71}$$

$$\left.\begin{aligned} Y^1_a &= [X_t, Z_a] = \frac{\delta}{\delta A^a_0} - D^a_{bi} \frac{\delta}{\delta \xi^b_i} \\ Y^2_a &= \left[X_t, Y^1_a\right] = D^a_{bi} \frac{\delta}{\delta A^b_i} - g f^c_{bd} \left(\delta^d_a \xi^b_i + A^b_0 D^d_{ai} \right) \frac{\delta}{\delta \xi^c_i} \\ Y^3_a &= \left[X_t, Y^2_a\right] = -g f^c_{ab} A^b_0 Y^2_c \end{aligned}\right\} \tag{9.3.72}$$

この例では，(9.3.23) の $C^\beta_{\alpha k}$ がゼロでない．

$$X_G = \int d^3x \left(\epsilon^a_0 Z_a + \epsilon^a_1 Y^1_a + \epsilon^a_2 Y^2_a \right) \tag{9.3.73}$$

X_G の定常条件から

$$\epsilon^a_0 + \dot\epsilon^a_1 = 0, \quad \epsilon^a_1 + \dot\epsilon^a_2 + g f^a_{bc} A^b_0 \epsilon^c_2 = 0 \tag{9.3.74}$$

ここで $\epsilon^a_2 = \epsilon^a(x)$ とおいて

$$X_G = \int d^3x \left[D^a_{b\mu} \epsilon^b(x) \frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)} + \partial_0 \left(D^a_{b\mu} \epsilon^b(x) \right) \frac{\delta}{\delta \xi^a_\mu(x)} \right] \tag{9.3.75}$$

となる．

位相空間に移行すると，Y^k_a, X_t はそれぞれ

$${}_*Y^1_a = \frac{\delta}{{}_*\delta A^a_0}, \quad {}_*Y^2_a = -g f_{abc} \pi^{ib} \frac{\delta}{\delta \pi^i_c} + D^b_{ai} \frac{\delta}{{}_*\delta A^b_i} \tag{9.3.76}$$

$${}_*X_t = \frac{\partial}{\partial t} + \int d^3x \left(\frac{\partial H_T}{\partial \pi^\mu_a} \frac{\delta}{{}_*\delta A^a_\mu} - \frac{\partial H_T}{{}_*\partial A^a_\mu} \frac{\delta}{\partial \pi^\mu_a} \right) \tag{9.3.77}$$

となる．ただし，H_T は (8.2.54) で与えられたものである．

X_G によって生成されるゲージ変換は

$$\delta A^a_\mu(x) = D^a_{b\mu}\epsilon^b(x), \quad \delta\xi^a_\mu(x) = \partial_0\left(D^a_{b\mu}\epsilon^b(x)\right) = \partial_0\delta A^a_\mu \tag{9.3.78}$$

この変換によって $\delta\boldsymbol{L} = 0$ となることは例題 8.3 で示した通りである．

速度位相空間と位相空間との不整合について

さきに指摘したように，δq^i が ξ を含むとき $d(\delta q^i)/dt$ には $\dot{\xi}$ が現われるが (9.3.25) の X_G には $\dot{\xi}$ はないので，(9.3.28) の $\delta\xi^i$ には $\dot{\xi}$ は含まれない．それゆえ，このような場合には

$$\left.\begin{aligned} &\delta q^i = X_G q^i, \ \delta\xi^i = X_G\xi^i \\ &\text{と} \\ &\delta\xi^i = \frac{d}{dt}\delta q^i \end{aligned}\right\} \tag{9.3.79}$$

は整合的でない．ところが，運動の生成子 X_t を用いて d/dt を表すと，(9.3.28) と (9.3.26) より

$$\delta\xi^i = X_G\xi^i = X_G X_t q^i = (X_t X_G + c^\alpha Z_\alpha)q^i = X_t\delta q^i \tag{9.3.80}$$

をえる．この結果からもわかるように，$d(\delta q^i)/dt$ に現われる $\dot{\xi}$ を運動方程式

$$\dot{\xi} = X_t\xi^i \tag{9.3.81}$$

を用いて書き換えれば (9.3.79) は成り立つ．それゆえ，δq^i が ξ^i によらないときは (9.3.79) は無条件に成り立つが，ξ^i によるとき，つまり**速度依存のゲージ変換の場合，(9.3.79) は運動方程式のもとでのみ満されるわ**けである．言い換えれば，(9.3.79) の第 2 式，またはそれと同等な位相空間の式

$${}_*\delta p_i = \{p_i, {}_*G\} \tag{9.3.82}$$

と (9.3.79) との整合性は運動方程式のもとでのみ成り立つのである．

これと同じ事情は位相空間での ${}_*\delta p_i$ と速度位相空間での $\delta p_i(q,\dot{q})$ とのずれにも見られる．実際に，位相空間でのゲージ変換は，

$${}_*\delta q^i = \{q_i, {}_*G(\epsilon)\}, \ {}_*\delta p^i = \{p_i, {}_*G(\epsilon)\} \tag{9.3.83}$$

で与えられるが，速度位相空間でのゲージ変換を

$$\delta q^i = X_G q^i \left(= \left\{ q^i, {}_*G \right\} \Big|_{p=p(q,\xi)} = \frac{\partial_* G}{\partial p_i}\Big|_{p=p(q,\xi)} \right) \tag{9.3.84}$$

と (9.3.29) とで定義しても，δq^i が ξ^i を含むとき，${}_*\delta p_i$ と $\delta p_i(q,\xi)$ の間には差があることを示そう (3)(4).

$$\begin{aligned}
\delta p_i(q,\xi) =& \frac{\partial p_i}{\partial q_j}\delta q^j + \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j}\delta \xi^j = \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial_* G}{\partial p_j} + A_{ij}\frac{d}{dt}(\frac{\partial_* G}{\partial p_j}) \\
=& \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial_* G}{\partial p_j} + A_{ij}\left(\frac{\partial_*^2 G}{\partial p_j \partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial_*^2 G}{\partial q^k \partial p_j}\xi^k + \frac{\partial_*^2 G}{\partial t \partial p_j} \right) \\
=& \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial_* G}{\partial p_j} + A_{ij}\frac{\partial_*^2 G}{\partial p_k \partial p_j}\left(\dot{p}_k - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) \\
&+ A_{ij}\left(\frac{\partial_*^2 G}{\partial p_j \partial p_k}\frac{\partial L}{\partial q^k} + \frac{\partial_*^2 G}{\partial q^k \partial p_j}\xi^k + \frac{\partial_*^2 G}{\partial t \partial p_j} \right)
\end{aligned} \tag{9.3.85}$$

右辺第 3 項は，$A_{ij}\partial/\partial p_j = \partial/\partial \xi^i$ を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
\text{第 3 項} =& \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial_* G}{\partial p_k} \right)\frac{\partial L}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial_* G}{\partial q^k} \right)\xi^k + \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial_* G}{\partial t} \right) \\
=& \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial_* G}{\partial q_k}\frac{\partial L}{\partial q^k} + \frac{\partial_* G}{\partial q^k}\xi^k + \frac{\partial_* G}{\partial t} \right) - \frac{\partial_* G}{\partial q_k}\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^i \partial q^k} - \frac{\partial_* G}{\partial q^i} \\
=& \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(-\frac{\partial_* G}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial q^k} + \frac{\partial_* G}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial_* G}{\partial t} \right) - \frac{\partial_* G}{\partial q_k}\frac{\partial p_i}{\partial q^k} + {}_*\delta p_i
\end{aligned}$$

上式の最後の変形で (9.3.4) と (9.3.83) を用いた．この右辺第 1 項の（　　）の中は，${}_*G$ の定常条件 (8.2.22) に他ならない．よって，$\partial \Phi^1_\alpha / \partial \xi^i \equiv 0$ ゆえに第 1 項は消える．上式と (9.3.85) を合わせると

$$\delta p_i(q,\xi) - {}_*\delta p_i = A_{ij}\frac{\partial_*^2 G}{\partial p_j \partial p_k}\left(\dot{p}_k - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) \quad \mathrm{mod}\left(\Phi^1_\alpha \right) \tag{9.3.86}$$

となる．$\dot{p}_k - \partial L/\partial q^k$ はラグランジュの運動方程式である．したがって，**$\partial_*^2 G/\partial p_j \partial p_k \neq 0$，すなわち，${}_*G$ が p_i の 2 次以上の項を含むとき，速度位相空間でのゲージ変換 $\delta p_i(q,\xi)$ と位相空間での ${}_*\delta p_i$ とは運動方程式の上でのみ一致する．**

古典力学の範囲では，運動方程式を常に前提としているから，このずれは実質的には問題にならない．しかし，量子力学に移行すると，古典的運動方程式以外での状態

遷移が許されるので，注意が必要である*)．速度位相空間と位相空間でのこのずれは，ゲージ不変性が両空間でずれることを意味する．

量子化することにより，古典論での対称性が破れたり，付加項が現われたりすることがある．これを量子異常という．ここで示したものはゲージ対称性の破れによる量子異常といえるであろう．

例題 9.4.　δq^i が ξ^i に依存する，速度依存ゲージ変換の簡単な例

${}_*G$ が p_i の 2 次の項を含む例として，次のラグランジュ関数を考える．

$$L = \frac{1}{2}\frac{\left(\xi^2 + q^3\right)^2}{1 - q^1} + \frac{1}{2}\frac{\left(\xi^3 + q^2\right)^2}{1 + q^1} \tag{9.3.87}$$

運動量とハミルトン関数は

$$p_1 = 0,\ \ p_2 = \frac{\xi^2 + q^3}{1 - q^1},\ \ p_3 = \frac{\xi^3 + q^2}{1 + q^1}, \tag{9.3.88}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(p_2^2 + p_3^2\right) - \frac{1}{2}q^1\left(p_2^2 - p_3^2\right) - q^2 p_3 - q^3 p_2 \tag{9.3.89}$$

である．拘束条件は第 1 類の

$${}_*\Phi^1 = p_1 \approx 0, \quad {}_*\Phi^2 = \frac{1}{2}(p_2^2 - p_3^2) \approx 0, \quad {}_*\dot{\Phi}^2 = 0 \tag{9.3.90}$$

となる．${}_*\Phi^2$ が p の 2 次式であるから，${}_*G$ も同様に 2 次式となる；

$${}_*G = -\dot{\epsilon}p_1 + \epsilon\left(p_2^2 - p_3^2\right)/2 \tag{9.3.91}$$

この ${}_*G$ によるゲージ変換は

$$\left.\begin{array}{l} \delta q^1 = -\dot{\epsilon}, \quad \delta q^2 = \epsilon p_2, \quad \delta q^3 = -\epsilon p_3 \\ {}_*\delta p_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \end{array}\right\} \tag{9.3.92}$$

ここで，$\delta\xi^i = d(\delta q^i)/dt$ を要請すると，

$$\delta\xi^1 = -\ddot{\epsilon}, \quad \delta\xi^2 = \dot{\epsilon}p_2 + \epsilon\dot{p}_2, \quad \delta\xi^3 = -\dot{\epsilon}p_3 - \epsilon\dot{p}_3 \tag{9.3.93}$$

注 *）ファンマンの経路積分による量子化法では，状態遷移の確率振幅は $\langle q_2, t_2 | q_1 t_1 \rangle = \int \Pi_i dq^i dp_i e^{is/\hbar}, S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H(q,p))dt$ と表される．この表式で dp_i 積分を行うと，速度位相空間における経路積分に移行する．その際に，古典力学の運動経路以外にも，状態 (q_1, t_1) と (q_2, t_2) を結ぶすべての経路について積分する．そのため，(9.3.86) のくい違いが影響する．その結果，位相空間でのゲージ不変性が速度位相空間では破れる可能性がある．これも量子異常の一種といえるであろう．

となる．これら δq^i と $\delta\xi^i$ を用いて L の変分を求めると

$$\delta L = \frac{1}{2}\dot{\epsilon}\left(p_2^2 - p_3^2\right) + \epsilon\left(p_2\dot{p}_2 - p_3\dot{p}_3\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\epsilon}{2}\left(p_2^2 - p_3^2\right)\right] \tag{9.3.94}$$

となり，L は準不変となる．

他方 (9.3.88)，(9.3.92) および (9.3.93) から δp_i を求めると

$$\delta p_1 = 0, \quad \delta p_2 = \frac{\epsilon\left(\dot{p}_2 - p_3\right)}{1 - q^1}, \quad \delta p_3 = \frac{-\epsilon\left(\dot{p}_3 - p_2\right)}{1 + q^1} \tag{9.3.95}$$

となる．この δp_i と (9.3.92) の ${}_*\delta p_i$ とは明らかに異なるが，運動方程式

$$\dot{p}_2 - p_3 = 0, \quad \dot{p}_3 - p_2 = 0 \tag{9.3.96}$$

を用いれば，両者は一致する．

例題 9.5. 重力場：${}_*G$ が p の 2 次式の例

一般相対性理論の重力場を記述するラグランジュ関数密度は

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{2c\kappa}\sqrt{-g}R. \tag{9.3.97}$$

R はスカラー曲率，κ は重力定数である．時空間の計量テンソルを $g_{\mu\nu}(x)$ とすると g は $g_{\mu\nu}$ の行列式である．R は $g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ の 1 階および 2 階微分で表される．詳しい説明と計算は一般相対性理論の解説書にゆずらざるをえない．

重力場の正準形式をつくる場合，正準変数として何をとるかが問題であるが，通常は 10 個の $g_{\mu\nu}$ を選ぶ．正準形式では時間 x^0 を特別に扱うので g_{00} と g_{0k} を

$$g^{00} \equiv -\left(\frac{1}{\lambda(x)}\right)^2, \quad g_{0k} \equiv \lambda_k(x) \tag{9.3.98}$$

とおくことにする (5)．

$\lambda, \lambda_k, g_{ik}$ に正準共役な量をそれぞれ π^0, π^k, π^{ik} とすると

$$\pi^0 = 0, \quad \pi^k = 0, \quad \pi^{ik} = \left(g_{\mu\nu}, \partial_i g_{\mu\nu}, \partial_0 g_{ik}\text{の関数}\right) \tag{9.3.99}$$

これより 1 次拘束条件は次の 4 つである．

$${}_*\Phi_\mu^1 = \pi^\mu \approx 0 \tag{9.3.100}$$

ハミルトン関数を求めて（省略），${}_*\Phi^1_\mu$ の定常条件を計算すると

$$\left.\begin{aligned} {}_*\Phi^2_0 = &\ \left\{{}_*\Phi^1_0, H\right\} = -\frac{2\kappa}{\sqrt{e}}\left\{\pi^{ik}\pi_{ik} - \frac{1}{2}\left(g_{ik}\pi^{ik}\right)^2\right\} + \frac{1}{2\kappa}\sqrt{e}R \\ {}_*\Phi^2_k = &\ \left\{{}_*\Phi^1_k, H\right\} = 2\nabla_i\pi^{ik} \end{aligned}\right\} \tag{9.3.101}$$

をえる．∇_i は x^i による共変微分であり，そして，$e = det(g_{ik})$ である．${}_*\Phi^2_\mu$ の定常条件からは，これ以上拘束はでない．計算は非常に複雑なので，ゲージ変換の母関数 ${}_*G$ をここで求めることはできないが，${}_*\Phi^2_0$ に π^{ik} の２次の項があるので，ゲージ変換 δg_{ik} は π^{ik} を含むことになる．

したがって，速度依存空間と位相空間とでゲージ変換にずれが生ずるので，量子化すると異常項が生ずる [(6)]．量子異常の原因にいろいろなものがあり，異常性の形も異なる [(7)]．このずれも，重力理論における量子異常の原因の一つであろう．

9.4　ゲージ不変量

ゲージ変換によって不変な物理量をゲージ不変量という．ゲージ理論において，ゲージ不変でない量は，物理的にあまり興味のない量である．物理的に観測可能な物理量は，ゲージ不変である．そのよく知られたものは，電磁場における電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{H}$ である．

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{9.4.1}$$

はゲージ変換　$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\epsilon(x)$ に対して不変である．そして

$$E_i = F_{0i}, \quad H_i = \epsilon_{ijk}F^{jk} \tag{9.4.2}$$

（ϵ_{ijk} はレビ-チビタの反対称テンソル）であるから $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ はゲージ不変量である．それに対して，A_μ 自体はゲージ不変でないから観測可能量でない*)．

このように，ゲージ不変量は物理的に重要なものである．そこでゲージ不変量の満す条件を明らかにしておく必要がある．

ゲージ変換は位相空間では，${}_*G(q,p)$ を生成母関数として

$$\delta q^i = \frac{\partial_* G}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\frac{\partial_* G}{\partial q^i} \tag{9.4.3}$$

注*）ただし，量子力学では，A_μ 自体も物理的に観測にかかることは，アハラノフ-ボーム効果として知られている．

である．他方，ゲージ不変量を $F(q,p)$ とすると，F の変化は

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\delta p_i \tag{9.4.4}$$

これに (9.4.3) を代入すると

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial_* G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial_* G}{\partial q_i} = \{F,_* G\} \tag{9.4.5}$$

である．よって位相空間では，ゲージ不変量は

$$\{F, {}_*G\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^k_\alpha\right) \tag{9.4.6}$$

によって定義される．ポアソン括弧などの操作の後，最後に拘束条件 ${}_*\Phi^k_\alpha = 0$ とするのであるから，$\{F,_* G\}$ は弱等式でゼロならばよいことに注意．

速度位相空間でのゲージ変換の生成子は (9.3.25) により

$$X_G = \epsilon^\alpha_0 Z_\alpha + \epsilon^\alpha_k Y^k_\alpha + \Phi^k_\alpha X_{\epsilon^\alpha_k} \tag{9.4.7}$$

であるから，ゲージ不変量は

$$X_G F(q,\xi) \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\Phi^k_\alpha) \tag{9.4.8}$$

で表される．

前節で述べたように，${}_*G$ の p_i による 2 回微分 $\partial^2_* G/\partial p_i \partial p_j \neq 0$ のとき，つまりゲージ変換が運動量（あるいは速度）に依存するとき，位相空間での定義 (9.4.6) と速度位相空間での定義 (9.4.8) は運動方程式上でのみ一致する．この点に留意すべきである．

ネーターの定理の逆

ネーターの定理については第 3 章で説明したが，そのとき，3.2 節でネーターの定理の逆，つまり，**ある一つの保存量が存在すれば，それに対応して，作用積分を（準）不変にする変換が存在するか**，という問題を提起しておいた．それに対する解答を与えておこう．

ゲージ変換の生成母関数 G によって与えられる変換 (8.3.31)

$$\delta q^i = \left.\frac{\partial_* G(q,p)}{\partial p_i}\right|_{p=p(q,\xi)}, \quad \delta\xi = \delta\dot{q}^i = \frac{d}{dt}\delta q^i \tag{9.4.9}$$

のもとで，ラグランジュ関数は準不変となることを (8.3.33) ~ (8.3.35) で示した．その導き方を見ると，${}_*G$ は定常条件

$$\frac{\partial_* G}{\partial t} + \{{}_*G, H\} \equiv 0, \quad \left\{{}_*G, {}_*\Phi^1_\alpha\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\left({}_*\Phi^1\right) \tag{9.4.10}$$

のみ満しておればよかった．すなわち，運動の保存量であれば，ゲージ変換の生成母関数である必要はない．したがって，運動方程式の第 1 積分から保存量

$$\psi(q,p) = \text{一定} \tag{9.4.11}$$

が求まり，それが

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \{\psi, H\} \equiv 0, \quad \left\{\psi, \Phi^1_\alpha\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\Phi^1) \tag{9.4.12}$$

を満せば，$\psi(q,p)$ を生成母関数とする微小変換

$$\left.\begin{aligned} \delta q^i &= \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \quad (\epsilon\text{：微小パラメーター}) \\ \delta \dot{q}^i &= \delta \xi^i = \frac{d}{dt} \delta q^i \end{aligned}\right\} \tag{9.4.13}$$

によってラグランジュ関数は準不変となる．$\psi(q,p)$ は 4.6 節で述べた微小正準変換の母関数と同じ役割を果すわけである．

拘束条件が 2 次，3 次と高次拘束が存在するとき，保存則は弱等式として成り立つから，高次拘束のある系では，ψ は (9.4.12) を常に満すとは限らないことに留意すべきである．

これに対して，拘束条件のない正則なラグランジュ関数の場合，${}_*\Phi^1_\alpha$ は存在しないので，

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \{\psi, H\} = 0 \tag{9.4.14}$$

さえ満せばよい．よって，すべての保存量に対してネーターの逆定理が成立する．その場合でも

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi\right) \tag{9.4.15}$$

となる．

文献

(1) 木村利栄・菅野礼司『微分形式による解析力学』(改訂増補版) 吉岡書店, 第 9 章 9.1 節.

(2) R. Sugano and H. Kamo, Prog. Ther. Phys. **67** (1982), 1966.

(3) R. Sugano, Y. Saito and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **76** (1986), 283.

(4) Y. Saito, R, Sugano, T. Ohta and T. Kimura, J. Math. Phys. **30** (1989), 1122.

(5) 内山龍雄『一般相対性理論』裳華房 (1978) 第 10 章.

(6) T. Kimura, Prog. Thero. Phys. **42** (1969), 1191.

(7) 藤川和男『ゲージ場の理論』岩波講座 (1993).

第 10 章

ゲージ自由度—ディラックの予想と関連して—

第 1 類拘束条件について，1 次拘束 Φ_α^1 と 2 次以降の拘束条件 $\Phi_\alpha^k(k \geq 2)$ とは同列に扱いうるとの予想がディラックによってなされた．つまり，Φ_α^1 と $\Phi_\alpha^k(k \geq 2)$ とは質的に区別しなくともよいというわけである．ディラックのこの予想をめぐっていろいろな考察がなされた*)．しかし，Φ_α^1 と Φ_α^k とは質的に異なるもので，同列に扱うと，矛盾が起り，かつ速度位相空間の定式化と位相空間の定式化との対応が整合的でなくなる．それゆえ，ディラックの予想は成り立たないことを本章で示すことにする．本章の拘束条件 Φ_α^k はすべて第 1 類とする．

10.1 拡張されたハミルトン関数 H_E 形式と H_T 形式の比較

第 1 類拘束 Φ_α^k はゲージ変換と結びついていること，そしてゲージ変換の母関数 G によって生成されるゲージ自由度は 1 次拘束条件 $\Phi_\alpha^1(\alpha = 1 \sim R)$ の数 R であることを第 8 章で示した．

また，位相空間の 1 次拘束 ${}_*\Phi_\alpha^1(q,p)$ は速度位相空間では恒等的に消え $\Phi_\alpha^1(q,p(q,\xi) \equiv 0$ であるのに対して，2 次以降の拘束条件 ${}_*\Phi_\alpha^k(k \geq 2)$ にはこのような性質がない．しかも，1 次拘束はヘシアン行列 A_{ij} の階数と直接結びついていて

注*）ディラックの予想を肯定する立場からの議論が，一時大勢を占めていたが，筆者らは最初から否定的であった [(1),(2)]．

運動方程式には関係なく現われるが，$\Phi_\alpha^k\,(k \geq 2)$ は運動方程式によって Φ_α^1 の定常条件から導かれる．このように Φ_α^1 と $\Phi_\alpha^k\,(k \geq 2)$ は質的に異なることをまず指摘しておく．

ディラックは拘束系のハミルトン関数として Φ_α^1 を正準ハミルトン関数 H に付加した全ハミルトン関数

$$H_T = H + v^\alpha \Phi_\alpha^1 \quad (v^\alpha\text{：任意}) \tag{10.1.1}$$

を用いる定式化を最初行った．ところが，後に，すべての $\Phi_\alpha^k\,(k = 1 \sim K)$ を H に加えた拡張されたハミルトン関数（extended Hamiltonian）

$$H_E = H + \lambda_k^\alpha \Phi_\alpha^k \quad (\lambda_k^\alpha\text{：任意}) \tag{10.1.2}$$

を用いる定式化も可能であろうとの予想を行った*)．本節では H_E による拡張されたゲージ変換の正否を吟味するが，結論を先にいうと，H_E 形式は種々不合理な結果に導かれるので，H_T の方が妥当である．

これまで H_T 形式は速度位相空間でのラグランジュ形式と同等であることを示してきたので，ここでは H_E 形式について述べ，問題点を指摘する．

まず，H_E の Φ_α^k のうち，すでに述べたように Φ_α^1 は速度位相空間では消えるが，$\Phi_\alpha^k(k \geq 2)$ は消えないので，H_E をラグランジュ形式にもどしたとき，元のラグランジュ形式と等価でない．実際に，電磁場の場合には例題 8.2 で求めた拘束条件により

$$H_E = H + \int d^3x \left[\lambda^1(x)\pi^0(x) + \lambda^2(x)\partial_i\pi^i(x)\right] \tag{10.1.3}$$

$$H = \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i - A_0\partial_i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right] \tag{10.1.4}$$

となる．この H_E を用いた運動方程式は

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_0 A_0 = \{A_0, H_E\} = \lambda^1, & \partial_0 A_i = \pi^i + \partial_i A_0 - \partial_i \lambda^2 \\ \partial_0 \pi^0 = 0, & \partial_0 \pi^i = \partial_j F^{ij} \end{array}\right\} \tag{10.1.5}$$

となる．

これを H_T 形式の

$$H_T = H + \int d^3x v(x)\pi^0(x) \tag{10.1.6}$$

注*）ディラックの予想は，ゲージ変換の母関数 G が第 1 類拘束条件の一次結合で構成されることが見出される以前になされた．

から導かれる運動方程式

$$\left.\begin{array}{ll}\partial_0 A_0 = v, & \partial_0 A_i = \pi^i + \partial_i A_0 \\ \partial_0 \pi^0 = 0, & \partial_0 \pi^i = \partial_j F^{ij}\end{array}\right\} \tag{10.1.7}$$

と比較すると，運動量 π^i の定義が，(10.1.5) の第２式と (10.1.7) の第２式とでは異なることがわかる．

ゲージ変換を見ると，例題 8.2 で示したように，H_T 形式では (8.2.46) の ${}_*G$ によって与えられる

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon(x), \quad \delta\pi^\mu = 0 \tag{10.1.8}$$

であり，この変換で作用積分は不変であった．運動方程式 (10.1.7) はこのゲージ変換と $\delta v = \ddot{\epsilon}$ によって不変である．それに対して，H_E 形式でのゲージ変換は，λ^1, λ^2 が任意であるから，２つの任意関数 ϵ^1, ϵ^2 によって

$$\delta A_0 = \epsilon^1(x), \quad \delta A_i = -\partial_i \epsilon^2(x), \quad \delta\pi^\mu = 0 \tag{10.1.9}$$

と表される．運動方程式 (10.1.5) はこの変換と同時に

$$\delta\lambda^1 = \partial_0 \epsilon^1, \quad \delta\lambda^2 = \partial_0 \epsilon^2 + \epsilon^1 \tag{10.1.10}$$

とすれば不変である．しかし，作用積分は (10.1.9) に対して当然ながら不変ではない．

このように，H_T 形式ではゲージ自由度は 1（任意関数は $\epsilon(x)$ 一つ）で，作用積分も運動方程式も不変である．他方，H_E 形式では，ゲージ自由度は任意関数 $\epsilon^1(x), \epsilon^2(x)$ の２であり，運動方程式は不変にできるが，作用積分は不変でないから，元のラグランジュ形式と整合的でない．

この予備的考察を一般化して論じよう．

ゲージ変換について

H_E の中の λ_k^α はすべて任意であるから，個々の Φ_α^k が独立にゲージ変換の母関数になりうる．κ_k^α を微小任意関数として，次の変換

$$\delta q_i = \kappa_k^\alpha \left\{q^i, \Phi_\alpha^k\right\}, \quad \delta p_i = \kappa_k^\alpha \left\{p_i, \Phi_\alpha^k\right\}, \quad (\alpha = 1 \sim R,\ k = 1 \sim K) \tag{10.1.11}$$

は拡張された $R \times K$ 個のゲージ変換を与える．そして，この力学変数の変換と次の λ_k^α の変換とで H_E は準不変となる．

$$\delta\lambda_k^\alpha = \kappa_k^\alpha - D_{\beta\gamma k}^{\alpha\ \ lm} \lambda_l^\beta \kappa_m^\gamma + C_{\beta\ k}^{\alpha l} \kappa_l^\beta \tag{10.1.12}$$

ただし，右辺の係数 $C_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots}$，$D_{\cdots\cdots}^{\cdots\cdots}$ は

$$\left\{\Phi_\alpha^k, \Phi_\beta^l\right\} = D_{\alpha\beta m}^{\gamma\ \ kl} \Phi_\gamma^m, \quad \left\{\Phi_\alpha^k, H\right\} = C_{\alpha l}^{\beta k} \Phi_\beta^l \tag{10.1.13}$$

である．それゆえ，H_E 形式ではゲージ自由度は $R \times K$ である[(3)]．（しかし，作用積分（あるいは L）は λ_k^α を含まないので準不変ではない．）

この拡張されたゲージ変換のもう一つの疑問点は，その変換の生成子 ${}_*X_{\Phi_\alpha^k}$ が速度位相空間で常に存在するとは限らないことである．9.1 節で述べたように，拘束条件のある特異系では，位相空間から速度位相空間への写像は微分演算子 $\partial/{}_*\partial q^i, \partial/\partial p_i$ については必ずしも可能ではない．関数 ${}_*f(q,p)$ に対する生成子

$${}_*X_f = \frac{\partial f}{{}_*\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{{}_*\partial q^i}$$

の速度位相空間への写像 X_f が存在するための条件は (9.3.17)

$$\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, {}_*f\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1) \tag{10.1.14}$$

であった．それゆえ，${}_*\Phi_\alpha^k$ の中で，上式を満さないものがあれば，速度位相空間においてその Φ_α^k に対応するゲージ変換の生成子 $X_{\Phi_\alpha^k}$ は存在しないことになる．それに対して H_T 形式でのゲージ変換の母関数 ${}_*G$ は，(8.2.23) にあるように (10.1.14) を満すから，X_G は常に存在する．

このように，ゲージ変換は，H_E 形式では位相空間と速度位相空間とで整合的でなく，しかも元のラグランジュ関数とはかけ離れたもので，別の力学系を扱うことになる．

H_T 形式と H_E 形式の差異が明瞭になるものに，もう一つゲージ固定の問題がある．ゲージ理論では，第 1 類拘束の数だけの非物理的自由度を消去して物理量を決める必要がある．そのために，第 1 類拘束条件と同数のゲージ固定条件を外から課して，第 1 類拘束が第 2 類拘束になるようにする．このゲージ固定条件の決め方に，

H_T と H_E の両形式では本質的に異なる．それについては，次節でゲージ固定の方法を論じた後に言及する．

例題 10.1．ディラックの予想と H_E 形式が妥当でない例．

ディラックの予想が正しくない例として提示された力学系を示す [4]．

$$L = \xi^1\xi^3 + \frac{1}{2}q^2(q^3)^2 \tag{10.1.15}$$

これから導かれるラグランジュ方程式は

$$\dot{\xi}^3 = 0, \quad \frac{1}{2}(q^3)^2 = 0, \quad \dot{\xi}^1 - q^2q^3 = 0 \tag{10.1.16}$$

1 次拘束条件と全ハミルトン関数は，それぞれ

$$_*\Phi^1 = p_2 \approx 0, \tag{10.1.17}$$

$$H_T = p_1p_3 - \frac{1}{2}q^2(q^3)^2 + vp_2 \tag{10.1.18}$$

である．

$_*\Phi^1$ の定常条件から，2 次，3 次拘束条件は

$$\left.\begin{aligned} {}_*\dot{\Phi}^1 &= \{{}_*\Phi^1, H_T\} = \frac{1}{2}(q^3)^2 \to {}_*\Phi^2 = q^3 \approx 0, \\ {}_*\dot{\Phi}^2 &= p_1 \to {}_*\Phi^3 = p_1 \approx 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.1.19}$$

よって，$_*\Phi^1 = p_2$，$_*\Phi^2 = q^3$，$_*\Phi^3 = p_1$ が第 1 類拘束条件である．すると H の中の $q^2(q^3)^2$ の項は拘束条件の 2 次式となるので強等式としてゼロになる．それゆえ，

$$H_E = \lambda_1p_1 + \lambda_2p_2 + \lambda_3q^3 \tag{10.1.20}$$

としてみよう．λ_k は任意関数である．(p_1p_3 と $q^2(q^3)^2$ の項は，それぞれ λ_1p_1 と λ_3q^3 の項に繰り入れたとみてもよい．) H_E からえられる運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\dot{q}^1 = \xi^1 = \lambda_1, \quad \dot{q}^2 = \xi^2 = \lambda_2, \quad \dot{q}^3 = \xi^3 = 0 \\ &\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = 0, \quad \dot{p}_3 = \lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{10.1.21}$$

である．正準運動量は $p_3 = \xi^1$ であるから，これを上式の最後の式に入れると，

$$\dot{\xi}^1 = \lambda_3 \tag{10.1.22}$$

をえる．この結果は (10.1.16) の第３式と矛盾する．結局，H_E 形式は妥当でないことがわかる．

例題 10.2. 拘束条件によって A_{ij} の階数が下る例；H_T 形式の妥当性

これもディラックの予想と関連して考案されたモデルで，H_T 形式と H_E 形式のいずれも矛盾が生じてうまくいかないと，フレンケルによって提示された [5]．それに対する解を与える [1]．

そのラグランジュ関数は

$$L = \xi^1(\xi^3)^2 - \frac{1}{2}q^2(q^3)^2 \tag{10.1.23}$$

である．ヘシアン行列とそのゼロ固有値ベクトルは

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\xi^3 & 0 & 2\xi^1 \end{pmatrix}, \quad \tau^i = (0 \quad 1 \quad 0) \tag{10.1.24}$$

である．ラグランジュの運動方程式は

$$2\xi^3\dot{\xi}^3 = 0, \quad \frac{1}{2}(q^3)^2 = 0, \quad 2\xi^3\dot{\xi}^1 + 2\xi^1\dot{\xi}^3 + q^2q^3 = 0 \tag{10.1.25}$$

9.2 節の方法によって

$$S_i = \left(0, -\frac{1}{2}(q^3)^2, -q^2q^3\right) \tag{10.1.26}$$

２次拘束は

$$\Phi^2 = S_i\tau^i = -\frac{1}{2}\left(q^3\right)^2 \approx 0 \tag{10.1.27}$$

である．また (9.3.1) の $S_i \approx A_{ij}\eta^j$ より

$$2\xi^3\eta^3 \approx 0, \quad 0 \approx \frac{1}{2}(q^3)^2, \quad 2\xi^3\eta^1 + 2\xi^1\eta^3 \approx -q^2q^3 \tag{10.1.28}$$

$$\therefore \quad \eta^3 \approx 0, \quad \eta^2 : \text{任意}, \quad \eta^1 = -\frac{q^2q^3}{2\xi^3} \tag{10.1.29}$$

よって

$$X_t = -\frac{q^2q^3}{2\xi^3}\frac{\partial}{\partial\xi^1} + \xi^i\frac{\partial}{\partial q^i} + uZ + \frac{\partial}{\partial t}, \quad Z = -\frac{\partial}{\partial\xi^2} \tag{10.1.30}$$

これより

$$Y^1=[X_t,Z]=\frac{\partial}{\partial q^2},\quad Y^2=\left[X_t,Y^1\right]=\frac{q^3}{2\xi^3}\frac{\partial}{\partial\xi^1},\quad Y^3=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi^1}-\frac{q^3}{2\xi^3}\frac{\partial}{\partial q^1} \tag{10.1.31}$$

をえる．かくして

$$X_T=-\frac{q^2q^3}{2\xi^3}\frac{\partial}{\partial\xi^1}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial q^2}+u\frac{\partial}{\partial\xi^2} \tag{10.1.32}$$

となる．

ところが，Φ^2 の定常条件から

$$\Phi^3=X_t\Phi^2=-\xi^3q^3\approx 0, \tag{10.1.33}$$

がでるので，新たに

$$\xi^3\approx 0 \tag{10.1.34}$$

をえる*)．すると A_{ij} は弱等式として階数が下り 1 となる；

$$\bar{A}_{ij}\equiv\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&2\xi^1\end{pmatrix}\qquad \bar{\tau}^i=(1\quad 0\quad 0) \tag{10.1.35}$$

ただし，$\bar{\tau}^i$ は $\bar{A}_{ij}\bar{\tau}^i=0$ を満す τ^i と独立なゼロ固有値ベクトルである．こうして新たに，

$$\left.\begin{aligned}\bar{Z}&=-\bar{\tau}^i\frac{\partial}{\partial\xi^i}=-\frac{\partial}{\partial\xi^1},\\ \bar{Y}^1&=\left[X_t,\bar{Z}\right]=\frac{\partial}{\partial q^1}\end{aligned}\right\} \tag{10.1.36}$$

を生成系に加えるべきである．それゆえ，結局

$$\bar{X}_T=-\frac{q^2q^3}{2\xi^3}\frac{\partial}{\partial\xi^1}+\xi^i\frac{\partial}{\partial q^i}+vY^1+\bar{v}\bar{Y}^1+uZ+\bar{u}\bar{Z}+\frac{\partial}{\partial t} \tag{10.1.37}$$

をえる (1)．上式の第 1 項の q^3,ξ^3 は ≈ 0 であるが，弱等式の定義に従ってすべての演算を終るまで残しておくべきである．$\left[\bar{X}_T,\bar{Y}^1\right]=0$ であるからこれ以上 $\bar{Y}^2$ は現われない．

注*）2 次拘束条件 (10.1.27) の Φ^2 の替りに，線形化して $\tilde{\Phi}^2=q^3$ とすれば $\tilde{\Phi}^2$ の定常条件から $\xi^3\approx 0$ は導かれる．(10.1.33) では Φ^3 が q^3 の 2 次ではないから，$\Phi^3\approx 0$ であるためには $\xi^3\approx 0$ が要請される．いずれにせよ，(10.1.34) が導かれる．

運動方程式は

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{q}^1 = \xi^1 + \bar{v}, & \dot{q}^2 = \xi^2 + v, & \dot{q}^3 = \xi^3 \\ \dot{\xi}^1 = -\bar{u}, & \dot{\xi}^2 = -u, & \dot{\xi}^3 = 0 \end{array}\right\} \tag{10.1.38}$$

ただし，$\dot{\xi}^1$ の右辺には不定の q^2q^3/ξ^3 があるが，任意関数 $\bar{u}$ に繰り入れた．

この速度位相空間での定式化を位相空間でみると，

$$p_1 = (\xi^3)^2, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 2\xi^1\xi^3, \tag{10.1.39}$$

$$H_T = H + vp_2, \quad H = \sqrt{p_1}p_3 + \frac{1}{2}q^2(q^3)^2 \tag{10.1.40}$$

$${}_*\Phi^1 = p_2, \quad {}_*\Phi^2 = -\frac{1}{2}(q^3)^2, \quad {}_*\Phi^3 = -q^3\sqrt{p_1} \tag{10.1.41}$$

である．$p_1 \approx 0$ より $\xi^3 \approx 0$ をえるから，$A_{ij} \approx \bar{A}_{ij}$ である．よって，

$${}_*\bar{\Phi}^1 = p_1, \quad \bar{\tau}^i = \frac{\partial_*\bar{\Phi}^1}{\partial p_i} = \delta^i_1 \tag{10.1.42}$$

を，新たに 1 次拘束として付け加えて，

$$\bar{H}_T = H + \bar{v}p_1 + vp_2 \tag{10.1.43}$$

をえる．${}_*\dot{\bar{\Phi}}^1 = 0$ であるから，これ以上拘束条件はない．

また，(10.1.31) の Y^k は

$$\left.\begin{array}{l} Y^1 \to {}_*Y^1 = \dfrac{\partial}{{}_*\partial q^2}, \ Y^2 \to {}_*Y^2 = q^3\dfrac{\partial}{\partial p_3}, \\ Y^3 \to {}_*Y^3 = \sqrt{p_1}\dfrac{\partial}{\partial p_3} - \dfrac{q^3}{2\sqrt{p_1}}\dfrac{\partial}{\partial q_1} \end{array}\right\} \tag{10.1.44}$$

となり，(10.1.41) の ${}_*\Phi^k$ と対応する ${}_*X_{\Phi^k}$ であることがわかる．

$\bar{H}_T$ より導かれる運動方程式は

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{q}^1 \approx \dfrac{1}{2}\dfrac{p_3}{\sqrt{p_1}} + \bar{v}, & \dot{q}^2 \approx v, & \dot{q}^3 \approx \sqrt{p_1} \\ \dot{p}_1 \approx 0, & \dot{p}_2 = -\frac{1}{2}(q^3)^2 \approx 0, & \dot{p}_3 = -q^2q^3 \approx 0 \end{array}\right\} \tag{10.1.45}$$

この運動方程式の解として

$$p_1 \approx p_2 \approx p_3 \approx 0, \quad q^3 \approx 0, \quad q^1, q^2 : \text{任意} \tag{10.1.46}$$

をえる．p_3 は定数でなく，運動方程式の第 1 式が意味をもつために $p_3 \approx 0$ である．この要請は $p_3 = 2\xi^1\xi^3$, $\xi^3 \approx 0$ とも整合している．

解 (10.1.46) は，速度位相空間の運動方程式 (10.1.38) の解

$$q^1, \quad q^2, \quad \xi^1, \quad \xi^2\text{；任意,} \quad q^3 \approx \xi^3 \approx 0 \tag{10.1.47}$$

とも整合的である．

フレンケルは H_T に $\bar{v}p_1$ を新たな 1 次拘束として H_T に加えず，$\bar{H}_T$ を用いなかったために，H_T, H_E 形式のいずれもラグランジュ形式と矛盾すると結論したわけである．この例のように，拘束条件によって，A_{ij} の階数が下る場合は，$\bar{A}_{ij}$ からえられる拘束条件 ${}_*\bar{\Phi}^1$ と $\bar{\tau}^i_\alpha$ を新たに 1 次拘束とゼロ固有値ベクトルの中に加えて，定式化し直すべきである．その結果，H_T 形式が正しいことが判明する．

次にゲージ変換を求めよう．(10.1.41) の ${}_*\Phi^k$ と (10.1.42) の ${}_*\bar{\Phi}^1$ は第 1 類拘束であるから，この力学系はゲージ不変である．そのゲージ変換の母関数は，これまでの考察から次のように置くべきである；

$${}_*G = \epsilon_{1*}\Phi^1 + \epsilon_{2*}\Phi^2 + \epsilon_{3*}\Phi^3 + \bar{\epsilon}_{1*}\bar{\Phi}^1. \tag{10.1.48}$$

ここで ${}_*\bar{\Phi}^1$ が ${}_*G$ に加わったことに留意すべきである．そして，

$${}_*\Phi^4 ={}_* \dot{\Phi}^3 = -p_1 = -\bar{\Phi}^1, \quad \dot{\bar{\Phi}}^1 = 0 \tag{10.1.49}$$

であるから，${}_*G$ の定常条件 (8.2.22)

$${}_*\dot{G} = \frac{\partial_* G}{\partial t} + \{{}_*G, H\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1) \tag{10.1.50}$$

より

$$\epsilon_1 + \dot{\epsilon}_2 = 0, \quad \epsilon_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0, \quad \epsilon_3 - \dot{\bar{\epsilon}}_1 = 0 \tag{10.1.51}$$

をえる．(10.1.50) で注意すべきは，右辺は $\mathrm{mod}({}_*\Phi^1)$ であって，$\mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\bar{\Phi}^1)$ ではないということである．${}_*\bar{\Phi}^1$ は L から直接生じた拘束条件ではなく，かつ速度位相空間で $\equiv 0$ でないからである．

(10.1.51) で $\bar{\epsilon}_1 = -\epsilon(t)$ とおいて，逐次 $\epsilon_3 \sim \epsilon_1$ を求めると

$${}_*G = -\dddot{\epsilon}\, p_2 - \frac{\ddot{\epsilon}}{2}(q^3)^2 + \dot{\epsilon}\sqrt{p_1}q^3 - \epsilon p_1 \tag{10.1.52}$$

をえる．

この ${}_*G$ から，ゲージ変換は

$$\left.\begin{aligned}\delta q^1 &= \frac{\partial_* G}{\partial p_1} = -\epsilon + \frac{\dot\epsilon}{2}\frac{q^3}{\sqrt{p_1}} = -\epsilon + \frac{\dot\epsilon}{2}\frac{q^3}{\xi^3},\\ \delta q^2 &= -\dddot\epsilon,\ \ \delta q^3 = 0\end{aligned}\right\} \tag{10.1.53}$$

$$\delta p_1 = -\frac{{}_*\partial G}{\partial q^1} = 0, \quad \delta p_2 = 0, \quad \delta p_3 = \ddot\epsilon q^3 - \dot\epsilon\sqrt{p_1} = \ddot\epsilon q^3 - \dot\epsilon\xi^3 \tag{10.1.54}$$

となる．上式の δq^i からえられる $\delta\xi^i$ は

$$\left.\begin{aligned}\delta\xi^1 &= \frac{d}{dt}\delta q^1 = -\frac{\dot\epsilon}{2}\left(1 + \frac{q^3\dot\xi^3}{(\xi^3)^2}\right) + \frac{\ddot\epsilon}{2}\frac{q^3}{\xi^3}\\ \delta\xi^2 &= \frac{d}{dt}\delta q^2 = -\ddddot\epsilon,\ \ \delta\xi^3 = 0\end{aligned}\right\} \tag{10.1.55}$$

である．このゲージ変換を用いると，L の変分は

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta\xi^1(\xi^3)^2 - \frac{1}{2}\delta q^2(q^3)^2\\ &= -\frac{\dot\epsilon}{2}\left[(\xi^3)^2 + q^3\dot\xi^3\right] + \frac{\ddot\epsilon}{2}q^3\xi^3 + \frac{1}{2}\dddot\epsilon(q^3)^2\\ &= \frac{d}{dt}\left[-\frac{\dot\epsilon}{2}q^3\xi^3 + \frac{\ddot\epsilon}{2}(q^3)^2\right]\end{aligned} \tag{10.1.56}$$

となる．よって L はこのゲージ変換により準不変である．

このゲージ変換の ${}_*G$ は $\sqrt{p_1}$ を含むから p による2階微分はゼロでない，すなわち，δq^i が ξ^3 あるいは p_1 に依存するから，9.3 節で指摘したように，(10.1.54) からえられる $\delta\xi^i$ は (10.1.55) と一致しない．p_i の定義 (10.1.39) と (10.1.54) から $\delta\xi^i$ を求めると

$$\begin{aligned}&\delta p_1 = 0 \to \delta\xi^3 = 0\\ &\delta p_3 = 2\delta\xi^1\xi^3 \to \delta\xi^1 = -\frac{\dot\epsilon}{2} + \frac{\ddot\epsilon}{2}\frac{q^3}{\xi^3}\end{aligned} \tag{10.1.57}$$

となる．この $\delta\xi^1$ と (10.1.55) の $\delta\xi^1$ は運動方程式 $\dot\xi^3 = 0$ のもとで一致する．

さらに速度位相空間でのゲージ変換の定式化も

$$X_G = \epsilon_0 Z + \epsilon_k Y^k + \bar\epsilon_0\bar Z + \bar\epsilon_1\bar Y^1, \quad (k = 1,2,3), \tag{10.1.58}$$

とすれば可能である．

(10.1.52) の $_*G$ は (10.1.50) において $\mathrm{mod}(\Phi^1)$ として求めたものである．$\bar{\Phi}^1$ は L から直接導かれる拘束でないので，(10.1.50) では除外した．しかし，$\bar{H}_T$ や $\bar{X}_T$ には 1 次拘束として加えたのであるから，$_*G$ の定常条件を $\mathrm{mod}(\Phi^1, \bar{\Phi}^1)$ とした場合にえられる母関数 $_*\bar{G}$ の役割を吟味しておくべきである．

(10.1.48) の $_*G$ を定常条件

$$\frac{\partial_* \bar{G}}{\partial t} + \left\{ {}_*\bar{G}, H \right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\Phi^1, \bar{\Phi}^1) \tag{10.1.59}$$

で決めたものを $_*\bar{G}$ で表す．すると

$$\epsilon_1 + \dot{\epsilon}_2 = 0, \quad \epsilon_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0, \quad \bar{\epsilon}_1 = \text{任意}$$

となる．よって $\epsilon_3 \equiv \epsilon, \quad \bar{\epsilon}_1 = \bar{\epsilon}$ とおくと

$$_*\bar{G} = \ddot{\epsilon} p_2 + \frac{\dot{\epsilon}}{2}(q^3)^2 - \epsilon q^3 \sqrt{p_1} + \bar{\epsilon} p_1 \tag{10.1.60}$$

をえる．この $_*\bar{G}$ による変分は

$$\left.\begin{aligned} &\delta q^1 = -\tfrac{1}{2}\epsilon \frac{q^3}{\sqrt{p_1}} + \bar{\epsilon}, \quad \delta q^2 = \ddot{\epsilon}, \quad \delta q^3 = 0, \\ &\delta p_1 = 0, \quad \delta p_2 = 0, \quad \delta p_3 = -\dot{\epsilon} q^3 + \epsilon \sqrt{p_1}. \end{aligned}\right\} \tag{10.1.61}$$

この $\delta q^i (i = 1 \sim 3)$ と $\delta \xi^i = d(\delta q^i)/dt$ によって L は準不変とならない．したがって $_*\bar{G}$ は L に対するゲージ変換の母関数ではない．しかし，次に示すように，(10.1.61) の変換は，$\bar{H}_T$ より導かれる運動方程式 (10.1.45) を不変にするのである．

(10.1.61) より

$$\left.\begin{aligned} &\delta \dot{q}^1 = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon} \frac{q^3}{\sqrt{p_1}} - \frac{\epsilon}{2} + \dot{\bar{\epsilon}}, \quad \delta \dot{q}^2 = \dddot{\epsilon}, \quad \delta \dot{q}^3 = 0 \\ &\delta \dot{p}_1 = 0, \quad \delta \dot{p}_2 = 0, \quad \delta \dot{p}_3 = -\ddot{\epsilon} q^3 \end{aligned}\right\} \tag{10.1.62}$$

をえる．ただし，上式で運動方程式の $\dot{p}_1 = 0$ と p_1 の定義からえられる $\xi^3 = \sqrt{p_1}$ を用いた．この変換により (10.1.45) は

$$\dot{\bar{\epsilon}} = -\delta \bar{v}, \quad \dddot{\epsilon} = \delta v \tag{10.1.63}$$

とすれば不変である．この結果からもわかるように，$\bar{v}$ の導入が必要なのである．

この例によっても，H_T 形式の妥当性が示される．その結果，H_T 形式が正しいことが判明する*)．

10.2　ゲージ固定

拘束条件は力学系の自由度を減少させる．特に，第2類拘束は位相空間の次元を縮減し，ディラック括弧はその縮減された位相空間におけるポアソン括弧に対応することを 8.2 節で示した．力学の自由度を一つ縮減するには，速度位相空間では共役変数 (q^α, ξ^α) の組，位相空間では (q^α, p_α) の組を消去する必要がある．それゆえ，1自由度の縮減には2個の拘束条件が要る．第2類拘束は必ず偶数個存在し，ポアソン括弧がゼロでない対があるので位相空間の縮減に適合した構造になっていた．

他方，第1類拘束条件の数は偶数とは限らないし，しかも相互のポアソン括弧は閉じている（つまり，弱等式でゼロ）．第1類拘束は力学系の自由度を減少させる役割をもっているのであるが，(q^α, p_α) の組をつくらず，一方の q^α または p_α に対応するものしかないので，それだけで位相空間を縮減することはできないわけである．それゆえ第1類拘束 ${}_*\Phi^k_\alpha \approx 0$（$R \times K$ 個）の1つ1つが1つの力学自由度を消去するのであるが，位相空間の (q^α, p_α) の対として消去するためには，外から制約条件を付け加え第2類拘束に落とさなければならないのである．この外的制約条件はゲージ固定条件と呼ばれる．

ゲージ固定について，その物理的意味と選び方について考察する．ゲージ固定に関して，留意すべき制限があるのにしばしばそれが見落されているからである．ゲージ変換は任意関数を含んでいるから，ゲージ自由度を有する力学変数は不定であり，そのままでは物理的に意味がない．つまり非物理的力学変数である．そこで，それらゲージ自由度を有する力学変数の不定性を制限するのがゲージ固定であり，その制約条件がゲージ固定条件（単にゲージ条件ともいう）である．

そこで問題になるのがゲージ自由度の数である．H_T 形式では，ゲージ自由度は第1類1次拘束 ${}_*\Phi^1_\alpha$ の数 R である．つまりゲージ変換の母関数 ${}_*G$ の中に含まれる任意関数は $\epsilon_\alpha(\alpha = 1 \sim R)$ のみであるから，ゲージ変換によってゼロにできる変数は R 個である．ところが第1類拘束 ${}_*\Phi^k_\alpha = 0$ $(k = 1 \sim K)$ は $R \times K$ 個あるから，そ

注*）「ディラックの予想」を巡り，コウレイの論文 (4) 以降多くの論文がでて，混乱した議論が一時期続いた．しかし，これによりフレンケルの提示した疑問も解決され，この種の議論は終結した．

れによって消去される力学変数は $R \times K$ 個である．それゆえ ${}_*\Phi_\alpha^k$ に見合う $R \times K$ 個の外的ゲージ固定条件 χ_k^α を与え，${}_*\Phi_\alpha^k \approx 0, \chi_k^\alpha \approx 0$ で対にしなければ位相空間の縮減を正しく行うことはできない．このゲージ自由度 R とゲージ条件 $R \times K$ のくい違いが，ゲージ条件を選ぶときに問題となる．

しかも，ゲージ条件の満すべきもう一つの重要なことがある．それは，拘束条件が運動方程式と整合的である（それは積分可能条件でもあった）ためにはそれらがすべて定常的でなければならなかったように，ゲージ固定条件 $\chi_k^\alpha(q,p)$ も定常条件を満さなければならないということである [(6)]．すなわち，

$$ {}_*\Phi_\alpha^k \approx 0 \text{ と対になる} \chi_k^\alpha \approx 0 \text{ は} \left\{{}_*\Phi_\alpha^k, \chi_k^\alpha\right\} \not\approx 0 \tag{10.2.1} $$

かつ，

$$ \left\{{}_*\Phi_\alpha^k, H\right\} \approx 0 \text{ に対応して} \{\chi_k^\alpha, H\} \approx 0 \tag{10.2.2} $$

でなければならない．(10.2.2) **がなければ，${}_*\Phi_\alpha^k$ も χ_k^α も時間が経過すると $\not\approx 0$ となり運動方程式と矛盾するようになる．この点がしばしば見過され，誤ったゲージ固定がなされることがある．**

ゲージ変換の自由度を用いて R 個の非物理的変数をゼロにできるように，R 個のゲージ固定 $\chi_1^\alpha = 0$ $(\alpha = 1 \sim R)$ は，$\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_1^\alpha\right\} \not\approx 0$*) であれば任意に選べると思いがちである．しかし，残る $R \times (K-1)$ 個のゲージ条件は，(10.2.1) と (10.2.2) を同時に満さねばならないので，H_T 形式ではその選択は単純ではない．

H_T 形式におけるゲージ固定

それを具体的に示すために，簡単な例として 1 次拘束 ${}_*\Phi^1$ と 2 次拘束 ${}_*\Phi^2$ が 1 個ずつある例をとる．

$$ H_T = H + v_*\Phi^1, \quad {}_*\Phi^1 \approx 0, \quad {}_*\Phi^2 \approx 0 \tag{10.2.3} $$

ゲージ固定として次のような χ_1 をとろう；

$$ \chi_1(q,p) \approx 0, \quad \Delta \equiv \left\{{}_*\Phi^1, \chi_1\right\} \neq 0. \tag{10.2.4} $$

すると，H_T の中のゲージ関数 v は $\Delta \neq 0$ のため，χ_1 の定常条件

$$ \{\chi_1, H_T\} \approx 0 \tag{10.2.5} $$

注*) Φ_α^1 でなくとも，ある一つの k の組 ${}_*\Phi_\alpha^k$ でもよい．

によって

$$v = \Delta^{-1}\{\chi_1, H\} \tag{10.2.6}$$

と定まる．これで，ゲージ固定がなされ，${}_*\Phi^1 \approx 0$ と $\chi_1 \approx 0$ によって力学系の 1 自由度が 1 つ縮減されたことになる．しかし，まだ ${}_*\Phi^2 \approx 0$ が残っている．${}_*\Phi^2$ にかかわる力学的自由度を縮減するためにはゲージ固定 $\chi_2 \approx 0$ を課さねばならないが，勝手なものでは χ_2 は定常条件を満さない．それは H_T の中に $u\Phi^2$ のような任意関数を含む項がないからである．χ_2 を勝手に選べないということは，ゲージ関数 ϵ（あるいは v）が一つしかないためで，ゲージ変換の母関数 ${}_*G$ に含まれる ϵ と $\dot{\epsilon}$ を用いて，${}_*\Phi^1$ と ${}_*\Phi^2$ に対応する自由度を同時に消去することはできないからである．したがって，たとえば運動方程式の第 1 積分の中で定常条件を満すもので，積分定数をゼロとしたものを ${}_*\chi_2$ として選び，それが

$$\chi_2 \approx 0, \ \left\{{}_*\Phi^2, \chi_2\right\} \neq 0 \tag{10.2.7}$$

であれば，これをゲージ条件とすることができるだろう．しかし，そのような第 1 積分は一般にはわからない場合が多いので，この方法は一般的でない．

そこで，第 1 のゲージ固定 χ_1 を随意に選ぶのでなく，次のような制限をつけるのである．すると，要請される条件をすべて満す χ_2 をえることができる．その方法は，χ_1 として

$$\left.\begin{aligned}\left\{{}_*\Phi^1, \chi_1\right\} &\equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2, \chi_1),\\ \left\{{}_*\Phi^2, \chi_1\right\} &\neq 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2, \chi_1),\end{aligned}\right\} \tag{10.2.8}$$

$$\{\chi_1, H_T\} = \chi_2 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2, \chi_1) \tag{10.2.9}$$

を満すものをとるのである (6)．こうすうと，(10.2.8) の第 1 式のゆえに H_T の中の v は定まらず，(10.2.9) によって新たに現われる χ_2 をゲージ固定 $\chi_2 \approx 0$ とすれば，χ_2 の定常条件から v が定まるのである．その理由を以下に示そう．

まず，上記の条件とヤコビの恒等式を用いて

$$\begin{aligned}\left\{{}_*\Phi^1, \chi_2\right\} &= \left\{{}_*\Phi^1, \{\chi_1, H_T\}\right\} = -\left\{\chi_1, \left\{H_T, {}_*\Phi^1\right\}\right\} - \left\{H_T, \left\{{}_*\Phi^1, \chi_1\right\}\right\}\\ &= \left\{\chi_1, {}_*\Phi^2\right\} + \mathrm{mod}({}_*\Phi^1, {}_*\Phi^2, \chi_1, \chi_2) \approx \left\{\chi_1, {}_*\Phi^2\right\} \neq 0\end{aligned} \tag{10.2.10}$$

をえる．このように，$\left\{{}_*\Phi^1, {}_*\chi_2\right\} \neq 0$ となるから，χ_2 の定常条件

$$\{\chi_2, H_T\} = 0 \tag{10.2.11}$$

によって，v が定まり，これ以上拘束条件は現われない．

これらの結果をまとめると，(10.2.8) を満す χ_1 を選び，

$$\chi_1 \approx 0,\ \ \chi_2 \approx 0 \tag{10.2.12}$$

をゲージ条件とすれば，

$$\left\{{}_*\Phi^1, \chi_2\right\} \neq 0,\ \ \left\{{}_*\Phi^2, \chi_1\right\} \neq 0 \tag{10.2.13}$$

となるので，${}_*\Phi^k, \chi_k\ \ (k = 1, 2)$ は第 2 類拘束になる．よって，これら ${}_*\Phi^k$ と χ_k を用いて，7.1 節で述べたようにディラック括弧を作れば，$2(N-2)$ 次元の縮減位相空間の形式となる．

上記のゲージ固定法の具体例として，電磁場をとってみよう．電磁場の拘束条件やハミルトン関数などは例題 8.2 で導いたように

$$ {}_*\Phi^1 = \pi^0,\ \ {}_*\Phi^2 = \partial_i \pi^i, \tag{10.2.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &H = \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi_i\pi^i - A_0\partial_i\pi^i + \tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\right], \\ &H_T = H + \int d^3x v(x)\pi^0(x) \end{aligned}\right\} \tag{10.2.15}$$

である．またゲージ変換の母関数は

$$ {}_*G(\epsilon) = \int d^3x \left[\partial_\mu \epsilon(x) \cdot \pi^\mu(x)\right]. \tag{10.2.16}$$

この ${}_*G(\epsilon)$ によるゲージ変換によって，A_μ のうちの一つをゼロにすることは常に可能である．しかし，まずゲージ条件 χ_1 を，(10.2.8) を満すものとして，クーロンゲージにとってみよう；

$$\chi_1 = \partial^i A_i = 0. \tag{10.2.17}$$

χ_1 の定常条件から，第 2 のゲージ条件として

$$\chi_2 = \{\chi_1, H_T\} = \partial_i\pi^i - \partial_i\partial^i A_0 \approx -\partial_i\partial^i A_0 = 0 \tag{10.2.18}$$

をえる．この χ_2 は π^i の定義 $\pi^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$ と ${}_*\Phi^2 = \partial_i\pi^i = 0$ から，$\chi_1 = 0$ を課すことでも導かれる．この $\partial_i\partial^i A_0$ を χ^2 としてもよいが，

$$-\partial_i\partial^i A_0 = \Delta A_0 = 0$$

の正則解で $|x^i| \to \infty$ においてゼロとなる A_0 は $A_0 = 0$ に限られる．それゆえ，(10.2.18) の代りに

$$\chi_2 = A_0 = 0 \tag{10.2.19}$$

を改めてゲージ条件に選ぶことができる．こうして

$$\left.\begin{array}{ll} {}_*\Phi^1 = \pi^0 = 0, & {}_*\Phi^2 = \partial_i \pi^i = 0 \\ \chi_2 = A_0 = 0, & \chi_1 = \partial^i A_i = 0 \end{array}\right\} \tag{10.2.20}$$

の４拘束条件は第２類拘束となったので，ディラック括弧によって２自由度に縮減された力学系（横波）をえる．

H_T の v は，$\{A_0, H\} = 0$ なので

$$\{\chi_2, H_T\} = v(x) = 0 \tag{10.2.21}$$

によりきまり，χ_2 は明かに定常条件を満すようにできる．

A_μ と π^μ の同時刻ディラック括弧は

$$\left.\begin{array}{l} \left\{A_0(x), \pi^0(x')\right\}^* = 0 \\ \left\{A_i(x), \pi^j(x')\right\}^* = \left(\delta_i^j - \partial_i \dfrac{1}{\Delta}\partial j\right)\delta(x - x') \end{array}\right\} \tag{10.2.22}$$

となる（これ以外はゼロ）*）．

クーロンゲージの他に，たとえば

$$\chi_1 = A_3 \tag{10.2.23}$$

と選ぶこともできる．

$$\chi_2 = \{\chi_1, H_T\} = -\pi^3 + \partial_3 A_0 \tag{10.2.24}$$

とすれば，

$$\dot{\chi}_2 = \{{}_*\chi_2, H_T\} = \partial_i F^{i3} - \partial_3 v = 0$$

により v が定まり，これ以上拘束条件は現われない．よって，これらの

$${}_*\Phi^1, \quad {}_*\Phi^2, \quad \chi_1, \quad \chi_2$$

は第２類拘束であり，χ_1, χ_2 は定常条件を満すゲージ条件である．

注*）上式で $\frac{1}{\Delta}$ は $\frac{1}{\Delta}f(x) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3y}{|x-y|}f(y)$ の意味である．

このように，電磁場の場合は，ゲージ条件を簡単に選ぶことができるが*)，ヤン-ミルス場に対しては，これほど単純にはいかない．

例題 10.3．ヤン-ミルス場のゲージ条件；$\partial^i A_i^a = 0$ と $A_0^a = 0$ は矛盾 (8)．

これも例題 8.3 で，${}_*\Phi_\alpha^k, H_T, {}_*G$ などは求めてある．

$$
{}_*\Phi_\alpha^1 = \pi_a^0, \quad {}_*\Phi_\alpha^2 = D_{abi}\pi^{bi}, \quad (a, b = 1 \sim A) \tag{10.2.25}
$$

${}_*G(\epsilon)$ には A 個の任意関数 ϵ^a が含まれているので，A 個のゲージ条件は自由に選べるが，定常条件を満さねばならないので，制限される．

χ_1 が A_0^a を含まなければ (10.2.8) は満される．そして χ_2 の中に A_0^a があれば，(10.2.11) によって H_T の v^a を決めることで，χ_2 は定常的になる．

電磁場と同様に，クーロンゲージをとってみる．

$$
\chi_1^a = \partial^i A_i^a = 0 \tag{10.2.26}
$$

この定常条件より

$$
\chi_2^a = \{{}_*\chi_1^a, H_T\} = \partial^i(D_{bi}^a A_0^b - \pi_i^a) = 0 \tag{10.2.27}
$$

をえる．この χ_2^a には A_0^b があるから，χ_2^a は問題なく定常条件を満たす．

そして，(10.2.25) の ${}_*\Phi_a^1, {}_*\Phi_a^2$，およびこれら χ_1^a, χ_2^0 は明らかに第 2 類拘束の組をつくる．よって $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0$ は定常条件を満すゲージ条件である．

さらに，(10.2.27) の χ_2^a は ${}_*\Phi_a^2 = 0$ を用いると

$$
\chi_2^a = g f_{bc}^a A_i^b \pi^{ci} + \partial^i D_{bi}^a A_0^b = 0 \tag{10.2.28}
$$

となり，これは正準運動量の定義

$$
\pi_i^a = -\partial_0 A_i^a + D_{bi}^a A_0^b \tag{10.2.29}
$$

および $\chi_1^a = \partial^i A_i^a = 0$ と整合している．

注*) 電磁場の場合でも，ローレンツゲージ (共変的ゲージ) $\chi_1 = \partial^\mu A_\mu = 0$ をとると，$\{\chi_1, H_T\} \neq 0$ であるから v がきまり χ_2 は単純には選べない．そこでラグランジュ未定係数法のようにスカラー場 $B(x)$ を導入し，$B\partial^\mu A_\mu + \alpha B^2$ を L に加える．このラグランジュ関数から第 2 類拘束条件を導いてゲージ固定をし，それによって量子化を行う方法が中西により考案された (7)．

電磁場のときのように，(10.2.27) の代りに，$\bar{\chi}_2^a = A_0^a = 0$ をとると，$\bar{\chi}_2^a$ の定常条件は v^a を決定することで満される．しかし，χ_1^a の定常条件から (10.2.27) の χ_2^a が出るので，この χ_2^a の定常条件から第 3 の拘束 χ_3^a が現われる（v^a はすでに $\bar{\chi}_2^a$ によって決っているから）．さらに $\dot{\chi}_3^a$ から χ_4^a というように次々に拘束条件が出てしまう．それゆえ，H_T 形式においては，ヤン-ミルス場の場合クーロンゲージ $\partial^i A_i^a = 0$ と $A_0^a = 0$ は両立しないのである*)．

一般化

本節では，これまで 2 次拘束どまりの簡単な場合を論じてきた．次に，それを K 次拘束まで存在する場合に一般化しよう [(8)]．

第 1 類拘束が

$$ {}_*\Phi_\alpha^k \approx 0, \quad (\alpha = 1 \sim R,\ k = 1 \sim K) \tag{10.2.30}$$

のとき，ゲージ条件も $R \times K$ 個の

$$ \chi_k^\alpha \approx 0 \tag{10.2.31}$$

が必要である．これらの χ_k^α によって ${}_*\Phi_\alpha^k$ をすべて第 2 類に落すためには，すべての ${}_*\Phi_\alpha^k$ は少なくとも χ_k^α のどれか一つとポアソン括弧が $\neq 0$ でなければならない．その条件は

$$ \det\left(\left\{{}_*\Phi_\alpha^k, \chi_l^\beta\right\}\right) \neq 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi), \quad (\beta = 1 \sim R,\ l = 1 \sim K) \tag{10.2.32}$$

である．(10.2.32) 式で $\mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi)$ はすべての Φ_α^k と χ_k^α の略記である．これを満せば ${}_*\Phi_\alpha^k, \chi_k^\alpha$ の組は第 2 類となる．次に，その χ_k^α がすべて定常的でなければならないが，H_T 中のゲージ関数 v^α は R 個しかないので，χ_k^α の選択には制限がつく．

これらの条件を満す χ_k^α の組をシステマティックに構成する方法は次の通りである．まず，最初に選ぶゲージ条件 χ_1^α は

$$ \left\{{}_*\Phi_\alpha^k, \chi_1^\beta\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi_1), \quad (k = 1 \sim K-1), \tag{10.2.33}$$

$$ \det\left(\left\{{}_*\Phi_\alpha^K, \chi_1^\beta\right\}\right) \neq 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi_1), \tag{10.2.34}$$

注＊）電磁場との重要な差異は ${}_*\dot{\Phi}^2 = \left\{{}_*\Phi^2, H_T\right\} = -g f_{bc}^a A_0^b {}_*\Phi_c^2$ となり，ゼロにならないことである．

かつ

$$\{\chi_1^\alpha, H\} \neq 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi_1) \tag{10.2.35}$$

となるようにすればよい．(10.2.32) は (α, β) に関する $R \times R$ 行列式である．ここに

$$H_T = H + v_*^\alpha \Phi_\alpha^1 \tag{10.2.36}$$

である．

(証明)

χ_1^α の定常条件より

$$\chi_2^\alpha = \{\chi_1^\alpha, H_T\} \approx \{\chi_1^\alpha, H\} \tag{10.2.37}$$

をえる．上式の最後の移行で，(10.2.33) の $k = 1$ とした $\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_1^\beta\right\} \approx 0$ を用いた．上式は (10.2.35) のために，新たなゲージ条件 χ_2^α を与える．

以下同様の操作をくり返し

$$\chi_{k+1}^\alpha \equiv \{\chi_k^\alpha, H\}, \quad (k = 1 \sim K-1) \tag{10.2.38}$$

とおくことで，次々に，新たにゲージ条件が導かれる．実際に，ヤコビーの恒等式と (10.2.33) を用いて

$$\begin{aligned}\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_2^\beta\right\} &\approx \left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \left\{\chi_1^\beta, H\right\}\right\} = -\left\{\chi_1^\beta, \left\{H, {}_*\Phi_\alpha^1\right\}\right\} - \left\{H, \left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_1^\beta\right\}\right\} \\ &\approx -\left\{\chi_1^\beta, {}_*\Phi_\alpha^2\right\} + \mathrm{mod}(\Phi, \chi_1, \chi_2) \approx 0\end{aligned} \tag{10.2.39}$$

となるから，$\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_2^\beta\right\} \approx 0$ である．よって，H_T の v^α は決まらず，H を用いた定義

$$\chi_3^\alpha = \{\chi_2^\alpha, H_T\} \approx \{\chi_2^\alpha, H\} \tag{10.2.40}$$

によって χ_3^α は与えられる．同様に，χ_K^α まで (10.2.38) により定常的な新ゲージ条件が導かれる．最後に

$$\dot{\chi}_K^\alpha = \{\chi_K^\alpha, H\} + v^\beta \left\{\chi_K^\alpha, {}_*\Phi_\beta^1\right\} \approx 0 \tag{10.2.41}$$

において，右辺第 2 項の行列 $\left\{\chi_K^\alpha, {}_*\Phi_\beta^1\right\}$ が正則であれば，v^β が決定されて，χ_K^α の定常条件は満される．そして，それ以上新ゲージ条件は現われない．

α, β についての行列 $\left\{\chi_K^\alpha, {}_*\Phi_\beta^1\right\}$ が正則であることは次のように示される．(10.2.33) により

$$\left\{{}_*\Phi_\alpha^K, \chi_1^\beta\right\} = \left\{\left\{{}_*\Phi_\alpha^{K-1}, H\right\}, \chi_1^\beta\right\} = \left\{\left\{\chi_1^\beta, H\right\}, {}_*\Phi_\alpha^{K-1}\right\} + \left\{\left\{{}_*\Phi_\alpha^{K-1}, \chi_1^\beta\right\}, H\right\}$$
$$\approx -\left\{{}_*\Phi_\alpha^{K-1}, \chi_2^\beta\right\} \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi_1, \chi_2) \qquad (10.2.42)$$

この操作をくり返して

$$\left\{{}_*\Phi_\alpha^K, \chi_1^\beta\right\} \approx (-1)^{K-1}\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_K^\beta\right\} \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi) \qquad (10.2.43)$$

をえる．よって，(10.2.34) のゆえに

$$\det\left(\left\{{}_*\Phi_\alpha^1, \chi_K^\beta\right\}\right) \not\equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi) \qquad (10.2.44)$$

となる．こうして，(10.2.41) と (10.2.44) から

$$v^\beta = (\Delta^{-1})_\alpha^\beta \left\{\chi_K^\alpha, H\right\}. \qquad (10.2.45)$$

ここに

$$\Delta_\alpha^\beta \equiv \left\{\Phi_\alpha^1, \chi_K^\beta\right\} \qquad (10.2.46)$$

である．

結局 (10.2.33) ～ (10.2.35) を満すゲージ条件の組

$$\chi_\alpha^k = 0, \quad (k = 1 \sim K,\ \alpha = 1 \sim R) \qquad (10.2.47)$$

により，${}_*\Phi_\alpha^k$ と χ_k^α は第２類拘束となる．なぜならばすべての k について

$$\det\left(\left\{{}_*\Phi_\alpha^k, \chi_{K-k+1}^\beta\right\}\right) \neq 0 \qquad (10.2.48)$$

であることが，(10.2.42) や (10.2.44) を導いた方法から明らかである．こうして，ゲージ固定が完了し，位相空間の次元は $R \times K$ だけ縮減される．

最後に，(10.2.33) ～ (10.2.35) を満すこのような χ_1^α の組が常に存在するかという問題が残る．そのような χ_1^α は存在することが証明できる．しかし，その証明は文献 (8) にゆずり，ここでは割愛する．

H_E 形式におけるゲージ固定

H_E 形式の場合のゲージ固定条件は，H_T に比して簡単である．(10.1.2) のハミルトン関数 H_E は ${}_*\Phi_\alpha^k$ と同数の任意関数 λ_α^k を含み，すべての ${}_*\Phi_\alpha^k$ は独立なゲージ変換の母関数である；

$$H_E = H + \lambda_k^\alpha {}_*\Phi_\alpha^k \qquad (10.2.49)$$

それゆえ，ゲージ条件 χ_k^α の定常条件は，$\left\{{}_*\Phi_\alpha^k, \chi_l^\beta\right\}$ のつくる $(R \times K)$ 行 $(R \times K)$ 列の行列が

$$\Delta \equiv \det\left(\left\{{}_*\Phi_\alpha^k, \chi_l^\beta\right\}\right) \neq 0 \tag{10.2.50}$$

であれば満される．なぜならば

$$\dot{\chi}_k^\alpha = \{\chi_k^\alpha, H\} + \lambda_l^\beta \left\{\chi_k^\alpha, \Phi_\beta^l\right\} \equiv 0 \quad \mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi) \tag{10.2.51}$$

において，(10.2.50) があれば，λ_l^β は $\mathrm{mod}({}_*\Phi, \chi)$ の下で一義的に定まり，χ_k^α の定常性は満される．したがって，H_E 形式では χ_k^α は (10.2.50) の範囲で任意である．

このように，ゲージ固定条件に関して，H_T 形式と H_E 形式とでは質的な差があることを強調しておきたい．それにもかかわらず，H_T 形式は H_E 形式とは同等であり，しかも H_T 形式は H_E 形式の特殊な場合として H_E 形式に含まれるという主張があった [3]．確かに，$\lambda_k^\alpha = 0$ $(k \geq 2)$ とすれば，形の上では H_T と H_E は一致する．しかし，ゲージ条件 χ_k^α の定常条件が全く異なるから，単純にそのようなことはいえない．さらに，10.1 節で示したように，${}_*\Phi_\alpha^k$ $(k \geq 2)$ は速度位相空間でゼロではないから，H_E 形式は元のラグランジュ関数とは異質の力学系に移行しているのである．それゆえ，H_T 形式と H_E 形式とは物理的内容が異なるものであり，H_T 形式は H_E 形式には含まれない*)．

10.3　ディラック括弧の定常性

第 2 類拘束条件は位相空間を縮減させるが，7.2 節で述べたように，その縮退位相空間では，ディラック括弧が重要な役割を果した．また，前節で，ゲージ固定によって第 1 類拘束を第 2 類拘束に落して，位相空間の次元を縮減したが，その後の縮減位相空間ではやはりディラック括弧を用いることを示した．

ディラック括弧を用いた定式化が，時間によらず整合的であるためには，時間経過によってその形を変えてはならない．すなわち，ディラック括弧が時間的に定常であ

注*）ゲージ理論を経路積分を用いて量子化する方法を Faddeev が定式化した [9]．その場合，ゲージ自由度を消去して積分しないと，余分な非物理的経路を取り込むことになる（ゲージ変換で結ばれるすべての経路は唯一の経路とみなすべきである.）．それゆえゲージ固定条件 $\chi_k^\alpha = 0$ を課した経路積分を定式化するのであるが，Feddeev 理論は χ_k^α に (10.2.50) のみを要請した．それゆえ，H_E 形式に基づいていた理論である．ゲージ理論の経路積分に関しゲージ固定に対する定常条件を考慮したとき生ずる問題点については，文献（10）を参照されたい．

ることが必要である．もし，そうでないと，ある時刻で定めたディラック括弧の形式が後の時刻で運動方程式と矛盾してしまう．

ディラック括弧の定常性は，拘束条件の定常性によって保たれることは予想されるだろう．拘束条件が定常的でなければ，縮減位相空間が時間と共に変化してしまうので，力学系の運動を示す軌跡が縮減位相空間（元の位相空間の超曲面）からずれてしまうから，すべての時間で整合的な理論とならないからである．

したがって，ディラック括弧の形式が定常的であるためには，拘束条件とゲージ条件が共に定常的であることが要請されるのである．前節で示したように，ゲージ条件が定常条件を満さねばならないことがここでも理解される．

実際に，拘束条件とゲージ条件が定常的であればディラック括弧も定常的であることを次に示そう (11)．

第２類拘束条件（第１類拘束はゲージ条件と併せて第２類とする）をまとめて θ_s とする．第２類拘束は，

$$\{\theta_s, \theta_t\} \equiv \Delta_{st} \tag{10.3.1}$$

とおくと，行列 Δ は正則であるから，その逆行列 $\bar{\Delta}$ は

$$\bar{\Delta}^{st}\Delta_{tr} = \delta^s_r. \tag{10.3.2}$$

いま，ある時刻 t で同時刻ディラック括弧を (7.2.7) に従って

$$\{f, g\}^*_t \equiv \{f, g\}_t - \{f, \theta_s\}_t \bar{\Delta}^{sr} \{\theta_r, g\}_t \tag{10.3.3}$$

と定義すると，それは任意の時刻で成立すべきである．すると時刻 $t + dt$ における同時刻ディラック括弧から，時刻 t における上式を引くと，dt の１次の近似で次式が成り立つべきである．

$$\{\dot{f}, g\}^* + \{f, \dot{g}\}^* = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} - \{\dot{f}, \theta_s\}\bar{\Delta}^{sr}\{\theta_r, g\} - \{f, \theta_s\}\bar{\Delta}^{sr}\{\theta_r, \dot{g}\} - R \tag{10.3.4}$$

ただし

$$R \equiv \{f, \dot{\theta}_s\}\bar{\Delta}^{sr}\{\theta_r, g\} + \{f, \theta_s\}\dot{\bar{\Delta}}^{sr}\{\theta_r, g\} + \{f, \theta_s\}\bar{\Delta}^{sr}\{\dot{\theta}_r, g\} \tag{10.3.5}$$

である．また $\dot{f}$ などは次式の意味である；

$$\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H_T\} \tag{10.3.6}$$

ディラック括弧 $\{\dot{f},g\}^*,\{f,\dot{g}\}^*$ の定義を考慮すると，$\{f,g\}^*$ の形が運動方程式のもとで保たれるためには，(10.3.4) で $R\approx 0$ となるべきである．すべての θ_s が定常条件を満すならば

$$\dot{\theta}_s = a_s^t\theta_t \tag{10.3.7}$$

である．a_s^t はある関数である．これを R の表式に代入すると，$R\approx 0$ の条件として

$$a\bar{\Delta}+\bar{\Delta}a+\dot{\bar{\Delta}}\approx 0 \tag{10.3.8}$$

がえられる．他方

$$\dot{\bar{\Delta}} = -\bar{\Delta}\dot{\Delta}\bar{\Delta}, \tag{10.3.9}$$

であり，また θ_s の定常条件 (10.3.7) により

$$\dot{\Delta}\approx a\Delta+\Delta a. \tag{10.3.10}$$

であるから

$$\dot{\bar{\Delta}}\approx -a\bar{\Delta}-\bar{\Delta}a$$

をえる．これは $R\approx 0$ から導かれた (10.3.8) に他ならない．こうして，すべての拘束条件が運動方程式のもとで定常なら，それら拘束を用いたディラック括弧は時間と共にその形を保つことが証明された．

文献

(1) R. Sugano and H. Kamo, Prog. Theor. Phys. **67** (1982), 1966.

(2) R. Sugano, Prog. Theor. Phys. **68** (1982), 1377.

(3) M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Nucl. Phys. **B332** (1990), 169.

(4) Cawley, Phys. Rev. Lett. **42** (1979), 413, Phys. Rev. **D21** (1980), 252.

(5) A. Frenkel, Phys. Rev. **D21** (1980), 2986.

(6) R. Sugano and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **69** (1983), 252.

(7) N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **35** (1968).

(8) R. Sugano and T. Kimura, Prog. Theor. Phys. **69** (1983), 1256.

(9) L. D. Faddeev, Theor. and Math. Phys. **1** (1970).

(10) R. Sugano, "Constraint Theory and Quantization Methods" ed. by F. Colomo, L. Lusanna and G. Marmo (World Scientific, 1993).

(11) R. Sugano, Y. Kagraoka and T. Kimura, J. Math. Phys. **A7** (1992), 61.

第 11 章

ゲージ群の分類

これまで作用積分あるいはラグランジュ関数を（準）不変にするゲージ変換とその生成母関数を第 1 類拘束条件と関連させて考察してきた．ゲージ変換の母関数 G は第 1 類拘束の 1 次結合で表されることを証明した．その結果，ゲージ自由度は 1 次拘束条件 $\Phi^1_\alpha(\alpha = 1 \sim R)$ の数 R と一致し，そしてゲージ関数 ϵ_α は最高次の拘束条件 Φ^K_α の係数によって決定されることが明らかになった．それゆえ，ゲージ変換の性質を規定するのは，主として 1 次拘束 Φ^1_α と最高次拘束 Φ^K_α であると予想がつくであろう．

本章では，ゲージ変換の型（構造）とその特性を第 1 類拘束条件を用いて分類する．

前章までの話は，特異（非正則）ラグランジュ関数が与えられたとき，その拘束条件から，ほぼ機械的にゲージ変換の母関数を求める処方であったから，ゲージ理論の構造はすでにきまっていたわけである．それに対して，本章の議論は，むしろ逆に，拘束条件の構造からどのようなゲージ理論が可能かを探る方法である．それゆえ，ある特性を有するゲージ理論を構成するときにその手掛りとなりうるのではないかと思う．

11.1　ゲージ群

ラグランジュ関数 L あるいはその作用積分を不変にする変換は群をつくる．その微小変換の生成子を $X(\epsilon)$ とする．ϵ はその変換の微小パラメーター（関数）である．いま，1 回目の変換のパラメーターを ϵ_1 とし

$$\delta_1 L = X(\epsilon_1)L = 0 \tag{11.1.1}$$

で表す．２回目の変換 ϵ_2 についても

$$\delta_2 L = X(\epsilon_2)L = 0 \tag{11.1.2}$$

とすると，この２つの微小変換を重ねたものも，やはり L を不変にするから

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{12}L = X(\epsilon_2)X(\epsilon_1)L = 0,\\ \delta_{21}L = X(\epsilon_1)X(\epsilon_2)L = 0\end{array}\right\} \tag{11.1.3}$$

である．上記の順序を入れ替えた２つの変換の交換子積は第３の変換の生成子となる；

$$X(\epsilon_3) \equiv [X(\epsilon_2), X(\epsilon_1)] \tag{11.1.4}$$

この $X(\epsilon_3)$ は L を不変にするから，これら $X(\epsilon)$ の集合は変換群をつくる．その単位元は $X(\epsilon = 0)$，逆元は $X(-\epsilon)$ である*)．

また $X(\epsilon)$ により L が準不変になるとき，

$$\delta L = X(\epsilon)L = \frac{d}{dt}F \tag{11.1.5}$$

であるから，この変換を２回重ねて行っても準不変である．よって，この場合も (11.1.4) は成り立ち，$X(\epsilon)$ は変換群をつくる．

L を（準）不変にする変換群の中で，ϵ が任意関数のときがゲージ変換であるから，それをゲージ群（あるいはゲージ変換群）という．ゲージ変換の生成母関数を $G(\epsilon)$ で表わしてきた．位相空間で，この $X(\epsilon)$ を $G(\epsilon)$ で表すと 9.3 節で示したように

$$X(\epsilon) = \frac{\partial G(\epsilon)}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial G(\epsilon)}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{11.1.6}$$

である*)．そして，(11.1.4) の交換子積に公式 (4.2.16) を適用し，それをポアソン括弧によって表すと，

$$G(\epsilon_{(3)}) = \left\{G(\epsilon_{(1)}), G(\epsilon_{(2)})\right\} \tag{11.1.7}$$

となる．この$\epsilon_{(3)}$は ${}_*G$ の性質と$\epsilon_{(1)}$,$\epsilon_{(2)}$によって決定される．

注*）群の定義：ある集合の元に対して積が定義されていて，任意の２つの元 a, b の積 $a \cdot b$ がまたその集合に属すること．そして次の３条件を満す集合は群をつくる．①単位元 e が存在；$ea = ae = a$，②逆元 x が存在；$ax = xa = e$，③結合則を満す $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$．

注*）本章では位相空間のみに話を限るので ${}_*G$ の＊印を省略する．

ここで重要なことは，(11.1.7) で定義される $G(\epsilon_{(3)})$ は，$G(\epsilon_{(1)})$ と $G(\epsilon_{(2)})$ が定常条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial G}{\partial t}+\{G,H\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}(\Phi^1)\\&\left\{G,\Phi^1_\alpha\right\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}(\Phi^1)\end{aligned}\right\}\tag{11.1.8}$$

を満すなら，やはり定常条件を満足するということである．

証明：まず (11.1.7) の両辺に (11.1.8) を適用させると

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(\epsilon_{(3)})}{\partial t}+\left\{G(\epsilon_{(3)}),H\right\}=&\left\{\frac{\partial G(\epsilon_{(1)})}{\partial t},G(\epsilon_{(2)})\right\}+\left\{G(\epsilon_{(1)}),\frac{\partial G(\epsilon_{(2)})}{\partial t}\right\}\\&+\left\{\left\{G(\epsilon_{(1)}),G(\epsilon_{(2)})\right\},H\right\}.\end{aligned}\tag{11.1.9}$$

右辺の第 3 項をヤコビの恒等式を用いて書き変えると

$$\left\{\left\{G(\epsilon_{(1)}),H\right\},G(\epsilon_{(2)})\right\}+\left\{G(\epsilon_{(1)}),\left\{G(\epsilon_{(2)}),H\right\}\right\}$$

となるから (11.1.9) の右辺は

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial G(\epsilon_{(1)})}{\partial t}+\left\{G(\epsilon_{(1)}),H\right\},G(\epsilon_{(2)})\right\}+\left\{G(\epsilon_{(1)}),\frac{G(\epsilon_{(2)})}{\partial t}+\left\{G(\epsilon_{(2)}),H\right\}\right\}\\&=\left\{(\Phi^1_\alpha \text{の 1 次結合}),G(\epsilon_{(2)})\right\}+\left\{G(\epsilon_{(1)}),(\Phi^1_\alpha\text{の 1 次結合})\right\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}(\Phi^1)\end{aligned}$$

となる．上式の最後で (11.1.8) の第 2 式を用いた．よって

$$\frac{\partial G(\epsilon_{(3)})}{\partial t}+\left\{G(\epsilon_{(3)}),H\right\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}(\Phi^1)\tag{11.1.10}$$

となる．同様にヤコビの恒等式によって

$$\left\{G(\epsilon_{(3)}),\Phi^1_\alpha\right\}\equiv 0\quad \mathrm{mod}(\Phi^1)\tag{11.1.11}$$

をえる．

11.2　第 1 類拘束条件とゲージ群 [1]

第 8 章で示したように，$G(\epsilon)$ は第 1 類拘束 Φ^k_α の 1 次結合

$$G(\epsilon)=\epsilon^\alpha_k\Phi^k_\alpha,\quad (\alpha=1\sim R,\ k=1\sim K)\tag{11.2.1}$$

であり，α はゲージ自由度を表す．ゲージ関数 ϵ^α は最高次拘束 Φ_α^K の係数 ϵ_K^α である．Φ_α^k は拘束条件の定常性によって導かれる拘束条件の系列として

$$\Phi_\alpha^{k+1} \equiv \left\{\Phi_\alpha^k, H\right\}, \quad (k=1\sim K-1), \tag{11.2.2}$$

$$\left\{\Phi_\alpha^K, H\right\} = C_{\alpha k}^\beta \Phi_\beta^k \tag{11.2.3}$$

で定義された．(11.2.3) は Φ_α^K が拘束系列の最高次であることを示す．最大値 K は一般的には α によるが，簡単化して K とする．

第 1 類拘束 Φ_α^k はポアソン括弧に対して閉じている．すなわち抱合的関係にあるから

$$\left\{\Phi_\alpha^k, \Phi_\beta^l\right\} = D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma}\,\Phi_\gamma^m, \quad (\alpha,\beta,\gamma=1\sim R;\ k,l,m=1\sim K) \tag{11.2.4}$$

と表される．第 1 類拘束の代数的構造とゲージ変換の性質は (11.2.1) $\sim$ (11.2.4) によって決る．

したがって，(11.1.7) の $G(\epsilon_{(3)})$ のゲージ関数 $\epsilon_{(3)}^\alpha$ は $\epsilon_{(1)}^\alpha, \epsilon_{(2)}^\alpha, C_{\alpha k}^\beta$, および $D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma}$ によって決定される；

$$\epsilon_{(3)}^\alpha = g^\alpha\left(\epsilon_{(1)}^\beta, \epsilon_{(2)}^\beta, C_{\beta k}^\gamma, D_{\beta\gamma}^{kl}{}_{,m}^{\delta}\right) \tag{11.2.5}$$

それゆえ，ゲージ群の型は $\epsilon_{(3)}^\alpha$ の関数形 g^α によって分類されるわけである．そこでまず，$\epsilon_k^\alpha, C_{\alpha k}^\beta, D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma}$ の間の関係式を求めることから始めよう．

この分類法は，拘束条件の系列の最高次数 K が任意の場合に適用しうるが，関係式が繁雑になりわかりにくいので，K は 3 以下として話を進めることにする．通常のゲージ理論は $K=2$ である．本章の最初に指摘したように，ゲージ変換の性質を規定するのは主として 1 次拘束と最高次拘束であるから，$K=3$ とすればこの分類法の一般論を予測するのに十分であろう．そして，実用上も $K=3$ でほぼ十分である．それゆえ，以下では $K \leq 3$ とする．

まず，(11.2.1) を (11.1.8) に代入し，(11.2.2)，(11.2.3) を用いると次式をえる

$$\dot{\epsilon}_k^\alpha + \epsilon_{k-1}^\alpha + C_{\beta k}^\alpha \epsilon_K^\beta = 0 \tag{11.2.6}$$

ここに

$$\dot{\epsilon}_k^\alpha \equiv \frac{\partial \epsilon_k^\alpha}{\partial t} + \{\epsilon_k^\alpha, H\} \tag{11.2.7}$$

である．ϵ_K^α は任意関数なので，一般的には q, p を含むこともできるが，以下簡単化のため $\epsilon_k^\alpha = \epsilon^\alpha(t)$ として考察を進める（K は 2 または 3）．

(11.2.6) により逐次

$$\epsilon_{K-1}^\alpha = -\dot{\epsilon}^\alpha - C_{\beta K}^\alpha \epsilon^\beta, \quad \epsilon_{K-2}^\alpha = \ddot{\epsilon}^\alpha + C_{\beta K}^\alpha \dot{\epsilon}^\beta + (\dot{C}_{\beta K}^\alpha - C_{\beta K-1}^\alpha)\epsilon^\beta \tag{11.2.8}$$

をえる．ただし

$$\dot{C}_{\beta K}^\alpha \equiv \frac{\partial C_{\beta K}^\alpha}{\partial t} + \left\{ C_{\beta K}^\alpha, H \right\}. \tag{11.2.9}$$

次に，$\Phi_\alpha^k, \Phi_\beta^l, H$ に対するヤコビ恒等式をつくり，(11.2.2) ~ (11.2.4) を用いると

$$\left\{ \left\{ \Phi_\alpha^k, \Phi_\beta^l \right\}, H \right\} + \left\{ \left\{ \Phi_\beta^l, H \right\}, \Phi_\alpha^k \right\} + \left\{ \left\{ H, \Phi_\alpha^k \right\}, \Phi_\beta^l \right\} = 0, \tag{11.2.10}$$

$$\therefore \quad \left\{ D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma}\, \Phi_\gamma^m, H \right\} + \left\{ \Phi_\beta^{l+1}, \Phi_\alpha^k \right\} - \left\{ \Phi_\alpha^{k+1}, \Phi_\beta^l \right\} = 0 \tag{11.2.11}$$

ただし，

$$\Phi_\alpha^{K+1} = C_{\alpha k}^\beta \Phi_\beta^k \tag{11.2.12}$$

とする．(11.2.11) に (11.2.4) を代入して，Φ_δ^m の係数を取り出すと

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m-1}^{\delta} + D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,K}^{\gamma}\, C_{\gamma m}^\delta - D_{\alpha\beta}^{k+1l}{}_{,m}^{\delta} - D_{\alpha\beta}^{kl+1}{}_{,m}^{\delta} - \delta_K^k \left(C_{\alpha n}^\gamma D_{\gamma\beta}^{nl}{}_{,m}^{\delta} + \left\{ C_{\alpha m}^\delta, \Phi_\beta^l \right\} \right) \\ + \delta_K^l (C_{\beta n}^\gamma D_{\gamma\alpha}^{nk}{}_{,m}^{\delta} + \left\{ C_{\beta m}^\delta, \Phi_\alpha^k \right\}) + \left\{ D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\delta}, H \right\} = 0 \end{aligned} \tag{11.2.13}$$

をえる*)．また (11.1.8) の第 2 式から次式が導かれる．

$$\epsilon_l^\beta D_{\alpha\beta}^{1l}{}_{,k}^{\gamma} + \left\{ \Phi_\alpha^1, \epsilon_k^\gamma \right\} = 0, \quad (k \geq 2) \tag{11.2.14}$$

この式は mod(Φ^1) で成り立つ式からえられたので $k = 1$ は除かれる．上式で $k = K$ とおくと，$\epsilon_K^\gamma = \epsilon^\gamma$ は t のみの関数であるから第 2 項は消えて

$$\epsilon_l^\beta D_{\alpha\beta}^{1l}{}_{,K}^{\gamma} = 0 \tag{11.2.15}$$

をえる．上式の l についての和の中で，ϵ_l^β が $l = K-1, K-2$ のとき (11.2.8) を代入すると

$$\begin{aligned} \epsilon^\beta D_{\alpha\beta}^{1K}{}_{,K}^{\gamma} - \left(\dot{\epsilon}^\beta + C_{\delta K}^\beta \epsilon^\delta \right) D_{\alpha\beta}^{1K-1}{}_{,K}^{\gamma} \\ + \left[\left(\ddot{\epsilon}^\beta + C_{\delta K}^\beta \dot{\epsilon}^\delta + \left(\dot{C}_{\delta K}^\beta - C_{\delta K-1}^\beta \right) \epsilon^\delta \right] D_{\alpha\beta}^{1K-2}{}_{,K}^{\gamma} = 0 \end{aligned} \tag{11.2.16}$$

注*）$C_{\delta K}^\beta$ や $D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma}$ は Φ_α^k を含まないとする．また定義から $D_{\alpha\beta}^{K+1l}{}_{,m}^{\gamma} = 0$ である．

となる．ϵ^β は任意関数なので，$\epsilon^\beta, \dot{\epsilon}^\beta, \ddot{\epsilon}^\beta$ はみな独立な関数とみなせるからそれぞれの係数因子をゼロとしてよい．すると $\ddot{\epsilon}^\beta$ の係数から

$$D_{\alpha\beta}^{1K-2}{}_{,K}^{\gamma} = 0 \tag{11.2.17}$$

次に $\dot{\epsilon}^\beta, \epsilon^\beta$ の係数から，それぞれ

$$D_{\alpha\beta}^{1K-1}{}_{,K}^{\gamma} = 0, \quad D_{\alpha\beta}^{1K}{}_{,K}^{\gamma} = 0 \tag{11.2.18}$$

をえる．

$D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,K-1}^{\gamma}$ や $D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,K-2}^{\gamma}$ を求めるために，再び (11.2.14) を用いる．(11.2.14) で $k = K-1$（$k \geq 2$ だから，$K = 3$ に限られる）とおくと

$$\epsilon^\beta D_{\alpha\beta}^{1K}{}_{,K-1}^{\gamma} + \epsilon_{K-1}^\beta D_{\alpha\beta}^{1K-1}{}_{,K-1}^{\gamma} + \epsilon_{K-2}^\beta D_{\alpha\beta}^{1K-2}{}_{,K-1}^{\gamma} + \left\{\Phi_\alpha^1, \epsilon_{K-1}^\gamma\right\} = 0. \tag{11.2.19}$$

この式に (11.2.8) を代入すると (11.2.16) と類似の式をえる．そこで再び $\epsilon^\beta, \dot{\epsilon}^\beta, \ddot{\epsilon}^\beta$ の係数因子をゼロとおくことにより次式をえる．

$$\left.\begin{array}{l} D_{\alpha\beta}^{1K-2}{}_{,K-1}^{\gamma} = 0, \quad D_{\alpha\beta}^{1K-1}{}_{,K-1}^{\gamma} = 0, \\ D_{\alpha\beta}^{1K}{}_{,K-1}^{\gamma} - \left\{\Phi_\alpha^1, C_{\beta K}^\gamma\right\} = 0, \quad (K = 3) \end{array}\right\} \tag{11.2.20}$$

(11.2.14) は $k \geq 2$ であるから，$K = 3$ の場合は $k = K-2$ は適用できないのでこれ以上の情報はこの式からはえられない．

ここで，これまでえられた結果 (11.2.17) ～ (11.2.20) は一般の K についても成り立つが $K = 2$ と 3 の場合に具体的にまとめておく．

$$K = 2 \text{ の場合}：D_{\alpha\beta}^{1k}{}_{,2}^{\gamma} = 0, \ (k = 1, 2) \tag{11.2.21}$$

$$\left.\begin{array}{l} K = 3 \text{ の場合}：D_{\alpha\beta}^{1k}{}_{,3}^{\gamma} = 0, \ (k = 1, 2, 3), \quad D_{\alpha\beta}^{1l}{}_{,2}^{\gamma} = 0, \ (l = 1, 2) \\ \qquad\qquad\qquad D_{\alpha\beta}^{13}{}_{,2}^{\gamma} = \left\{\Phi_\alpha^1, C_{\beta 3}^\gamma\right\}. \end{array}\right\} \tag{11.2.22}$$

そして，$D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma}$ の定義 (1.2.4) から

$$D_{\alpha\beta}^{kl}{}_{,m}^{\gamma} = -D_{\beta\alpha}^{lk}{}_{,m}^{\gamma} \tag{11.2.23}$$

である．

次に $D_{\alpha\beta}^{2k}{}_{,l}^{\gamma}$ を求めるために (11.2.13) と (11.2.22) の結果を活用する．(11.2.13) で $K = m = 2$，$k = l = 1$ とおき，(11.2.21) を用いると

$$D_{\alpha\beta}^{11}{}_{,1}^{\gamma} = 0 \tag{11.2.24}$$

$K=2,\ k=1,\ m=l=2$ とおくと

$$D^{12}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}-D^{22}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}+\left\{C^{\gamma}_{\beta 2},\Phi^{1}_{\alpha}\right\}=0. \tag{11.2.25}$$

この式で α と β を入れ換え，(11.2.23) を用いて第 1，２項を書き直した式を上式に加えると

$$D^{12}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}+D^{12}_{\beta\alpha},{}^{\gamma}_{1}=\left\{\Phi^{1}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta 2}\right\}+\left\{\Phi^{1}_{\beta},C^{\gamma}_{\alpha 2}\right\} \tag{11.2.26}$$

をえる．

また，$K=2,\ m=k=l=1$ とおくと

$$D^{21}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}+D^{12}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}=0.$$

この式と (11.2.26) とより

$$2D^{12}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}=2D^{12}_{\beta\alpha},{}^{\gamma}_{1}=\left\{\Phi^{1}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta 2}\right\}+\left\{\Phi^{1}_{\beta},C^{\gamma}_{\alpha 2}\right\} \tag{11.2.27}$$

$K=3$ の場合も，同様の処方で (11.2.13) と (11.2.22) から，次のような関係式をえる．

$$D^{kl}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{3}=0,\quad (k,l=1,2) \tag{11.2.28}$$

$$D^{33}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{3}=D^{23}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}-\left\{\Phi^{2}_{\alpha},C^{\gamma}_{\beta 3}\right\}, \tag{11.2.29}$$

$$D^{12}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{k}=D^{12}_{\beta\alpha},{}^{\gamma}_{k},\quad (k=1,2) \tag{11.2.30}$$

これ以外にも，いくつかの関係式が導かれるが以下の考察に要らないので省略する．

これらの結果のうちで最も重要なものは，$K=2,3$ いずれの場合も $D^{kl}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{K}$ のうちで**ゼロでないものは $\boldsymbol{D^{KK}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{K}}$ のみであって，それ以外はすべてゼロ**

$$D^{kl}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{K}=0,\quad (k,l<K) \tag{11.2.31}$$

ということである．この特徴的な性質は任意の K について成り立つことが証明されている．

以上の準備のもとで，ゲージ群の代表的構造とその分類という本題に入ろう．すでに述べたように，(11.1.7) で定義された $G(\epsilon_{(3)})$ は定常条件 (11.1.8) を満すので，$\epsilon^{\alpha}_{(3)k}$（$k<K$）は $\epsilon^{\alpha}_{(3)K}$ とその時間微分で表されるから，$G(\epsilon_{(3)})$ は $\epsilon^{\alpha}_{(3)K}$ をゲージ関数として決定されるであろうと予想できる．実際に，(11.1.7) により

$$
\begin{aligned}
G(\epsilon_{(3)}) =& \epsilon^{\alpha}_{(3)k}\Phi^{k}_{\alpha} = \left\{\epsilon^{\alpha}_{(1)k}\Phi^{k}_{\alpha}, \epsilon^{\beta}_{(2)l}\Phi^{l}_{\beta}\right\} \\
=& \epsilon^{\alpha}_{(1)k}\epsilon^{\beta}_{(2)l}D^{kl}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{m}\Phi^{m}_{\gamma} + \epsilon^{\alpha}_{(1)k}\left\{\Phi^{k}_{\alpha}, \epsilon^{\beta}_{(2)l}\right\}\Phi^{l}_{\beta} \\
&+ \epsilon^{\beta}_{(2)l}\left\{\epsilon^{\alpha}_{(1)k}, \Phi^{l}_{\beta}\right\}\Phi^{k}_{\alpha} + \left\{\epsilon^{\alpha}_{(1)k}, \epsilon^{\beta}_{(2)l}\right\}\Phi^{k}_{\alpha}\Phi^{l}_{\beta}
\end{aligned}
\tag{11.2.32}
$$

となるが，すべての Φ^{k}_{α} は独立なので，$\epsilon^{\alpha}_{(3)K}$ は上式の両辺の Φ^{K}_{α} の係数因子を比べることによって決定される．ここで $\epsilon^{\alpha}_{(1)K}, \epsilon^{\beta}_{(2)K}$ は t のみの関数とし，$\left\{\epsilon^{\alpha}_{(a)k}, \Phi^{l}_{\beta}\right\}, \left\{\epsilon^{\alpha}_{(1)k}, \epsilon^{\beta}_{(2)l}\right\}$ は Φ^{K}_{γ} を含まないと仮定する．これらの仮定は非常に特殊な場合を除いて容認されるであろうことは，漸化式 (11.2.6) から推察できる．すると，これらの仮定のもとで，Φ^{K}_{α} の係数因子より次式をえる；

$$
\epsilon^{\gamma}_{(3)K} = \epsilon^{\alpha}_{(1)k}\epsilon^{\beta}_{(2)l}D^{kl}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K} \tag{11.2.33}
$$

ここで，(11.2.31) を用いると，$k = l = K$ のときのみ残るので

$$
\epsilon^{\gamma}_{(3)K} = \epsilon^{\alpha}_{(1)}\epsilon^{\beta}_{(2)}D^{KK}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K}, \quad (\epsilon^{\alpha}_{(a)} = \epsilon^{\alpha}_{(a)K}) \tag{11.2.34}
$$

をえる．この結果は，**ゲージ変換のゲージ関数 $\epsilon^{\alpha}_{(a)}$ の関係を決めるのは $D^{KK}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K}$ のみであるという注目すべきものである**．換言すれば，拘束条件の定常性を保証する一連のアルゴリズム **(11.2.2) の最終段階に現われる Φ^{K}_{α} によってゲージ群の代数的構造の基本が定められる**ということである．

ここで留意すべきことは，このような簡潔な結果をえたのは，Φ^{k}_{α} が拘束系列 (11.2.2), (11.2.3) の強等式によって，逐次定義されたからである．H ではなく H_T を用い，弱等式によって Φ^{k}_{α} を定義したのではこうはならない．

11.3　ゲージ群の分類

以上の結果に注目すると，**ゲージ群は次の２つの要素 (i) $D^{KK}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K}$，(ii) 拘束条件の階数 K とによって特徴づけられ，分類されると結論される**．よって，以下では，(i) と (ii) による分類を行なう．

(i)　$D^{KK}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K}$ による分類

(1)　$D^{KK}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K} = 0$ のゲージ群

この場合は，(11.2.34) により，$\epsilon^{\gamma}_{(3)K} = 0$, すなわち $G(\epsilon_{(3)}) = 0$ となるから，ゲージ群はアーベル群（可換群）である．つまり，すべてのゲージ自由度 α について，$D^{KK}_{\alpha\beta},^{\gamma}_{K} = 0$ のとき，ゲージ群は完全にアーベル（可換）群である．

また R 個のゲージ自由度のうちで，特定の α の系列についてのみ $D^{KK}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{K}=0$ のときは，α によって表されるゲージ自由度のみアーベル群となる．

よってゲージ自由度が 1 $(R=1)$ の場合は，この力学系はアーベルゲージ理論である．電磁場の理論はその例である．

(2)　すべての $D^{KK}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{K}=$ 定数 $\neq 0$ のゲージ群

(11.2.34) において，$\epsilon^{\alpha}_{(1)},\epsilon^{\beta}_{(2)}$ ともに t のみの関数であるから，$\epsilon^{\gamma}_{(3)}$ も t のみの関数となる．よって，$G(\epsilon_{(3)})$ と $G(\epsilon_{(a)})(a=1,2)$ とは同形であるから，$G(\epsilon)$ はポアソン括弧に関して閉じている．そして $G(\epsilon_{(3)})\neq 0$ であるから非アーベル（非可換）ゲージ群である．

その典型的な例はヤン-ミルス場である．この場合，$D^{22}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}=f_{\alpha\beta\gamma}$ (群の構造定数)．

(3)　$D^{KK}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{K}$ が q あるいは p に依存するゲージ群

$\epsilon_{(a)}(a=1,2)$ が t のみの関数であっても $\epsilon^{\alpha}_{(3)}$ は q,p を含む．すると $G(\epsilon)$ はポアソン括弧に関して閉じず，$G(\epsilon_{(3)})$ は $G(\epsilon_{(a)})$ と関数形が異なる．そして $G(\epsilon_{(4)})=\left\{G(\epsilon_{(3)}),G(\epsilon_{(a)})\right\}$ はさらに複雑な関数形となる．よって，この場合はさらに立入った考察が必要である．

このようなゲージ群の例は，重力場の理論や空間次元が ≥ 2 の相対論的膜理論である．

(ii)　拘束条件の階数 K による分類

(1)　$K=1$ の場合

この場合は前節の関係式（$K\geq 2$ で成立）は適用できない．2次拘束がなく，1次拘束 Φ^1_α は速度位相空間では恒等的にゼロであるから，ラグランジュ方程式からは拘束条件は現われない．したがって速度位相空間では拘束条件はない．それゆえ，このような拘束系は物理的にあまり興味がない．

(2)　$K=2$ の場合

通常のゲージ場理論（電磁場，ヤン-ミルス場，重力場など）がこの形である．

(11.2.25) と (11.2.27) とより

$$2D^{22}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}=-\left\{\Phi^1_\alpha,C^\gamma_{\beta 2}\right\}+\left\{\Phi^1_\beta,C^\gamma_{\alpha 2}\right\} \tag{11.3.1}$$

となるので，$C^\beta_{\alpha 2}$ が定数か，または

$$\left\{\Phi^1_\alpha,C^\gamma_{\beta 2}\right\}-\left\{\Phi^1_\beta,C^\gamma_{\alpha 2}\right\}=0 \tag{11.3.2}$$

ならば

$$D^{22}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}=0. \tag{11.3.3}$$

よって，この場合のゲージ群はアーベル（可換）群である．

また

$$C^{\beta}_{\alpha 1}=C^{\beta}_{\alpha 2}=0 \tag{11.3.4}$$

ならば，(11.2.13) からすべての

$$D^{kl}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{m}=0 \tag{11.3.5}$$

となることがわかる．

ヤン-ミルス場の場合は $C^{\beta}_{\alpha 2}=f_{\alpha\beta\gamma}A^{\gamma}_{0}\neq 0$ であり，$\Phi^{1}_{\alpha}=\pi^{0}_{\alpha}$ ゆえ (11.3.2) は満たされず，$D^{22}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}=f^{\gamma}_{\alpha\beta}=$ 定数である．これ以外はすべて $D^{kl}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{m}=0$ である．

$K=2$ の場合に，$D^{12}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}\neq 0$，または $D^{22}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{1}\neq 0$ の可能性が残されている．このような群は，非可換ゲージ場であるから，ヤン-ミルス場以外にも非可換ゲージ場は可能である．

(3)　$K=3$ の場合

多くの $D^{kl}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{m}$ の組合せが可能である．$D^{33}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{3}=0$ ならば，もちろん可換ゲージ群である．しかし，$C^{\beta}_{\alpha 3}=$ 定数であっても，(11.2.29) から，$D^{23}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{2}\neq 0$ ならば $D^{33}_{\alpha\beta},{}^{\gamma}_{3}\neq 0$ なので，非可換ゲージ群である．これが $K=2$ の場合と異なる特徴である．

$K=3$ の簡単なものは例題 8.1 の模型で，可換ゲージ群である．

$K=3$ の場合はいろいろな型が存在しうるが，これ以上詳しい考察は省略する．

例題 11.1.　$K=1$ のゲージ群で消去可能な例

1 次拘束条件のみで 2 次拘束のない形は，力学としてつまらないものであることを示す実例をあげておく．

$$L=\xi^{1}q^{1} \tag{11.3.6}$$

q^{1} の自由度が他の自由度と分離していて，q^{1} については上記のような L をとる．このような模型では他の力学変数は考えなくてよい．(11.3.6) より

$$p_{1}=q^{1}\rightarrow {}_{*}\Phi^{1}=p_{1}-q^{1}, \tag{11.3.7}$$

$$H_{T}=v\Phi^{1},\quad \dot{\Phi}^{1}=0 \tag{11.3.8}$$

をえる．ゲージ変換の ${}_*G$ は

$$ {}_*G = \epsilon {}_*\Phi^1 = \epsilon(p_1 - q^1) \tag{11.3.9} $$

$$ \therefore \quad \delta q^1 = \epsilon, \quad \delta\xi^1 = \dot{\epsilon} \tag{11.3.10} $$

この変換で，$\delta L = \frac{d}{dt}(\epsilon q^1)$ となり準不変であるが，この L 自体が $\frac{d}{dt}(q^1)^2/2$ で瑣末なつまらぬものである．

もう一つの例として次の L をとる．

$$ L = \frac{1}{2}(\xi^1 - \xi^2)^2 - \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 \tag{11.3.11} $$

$$ p_1 = \xi^1 - \xi^2, \quad p_2 = -\xi^1 + \xi^2 $$

$$ \Phi^1 = p_1 + p_2 \tag{11.3.12} $$

$$ H_T = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}(q^1 - q^2)^2 + v(p_1 + p_2) \tag{11.3.13} $$

よって

$$ \dot{\Phi}^1 = \left\{\Phi^1, H_T\right\} = 0 $$

$$ {}_*G = \epsilon(p_1 + p_2) $$

$$ \delta q^1 = \delta q^2 = \epsilon, \quad \delta\xi^1 = \delta\xi^2 = \dot{\epsilon} \tag{11.3.14} $$

であるから $\delta L = 0$ となる．

この場合は，$q^1 - q^2 = Q$ とおくことで，q^1, q^2 は 1 変数に変換される．すると Q についてはもはや拘束条件は現われないので，このゲージ自由度は見かけだけで，つまらぬものである．

文献

(1) R. Sugano and T. Kimura, J. Math. Phys. **31** (1990), 2337.
木村利栄・菅野礼司『微分形式による解析力学』改訂増補版（吉岡書店）第 9 章．このようなゲージ群の分類の考察が行われたのはこの論文のみである．

終章　ゲージ理論について

これまで，拘束系の解析力学をゲージ理論を主軸にして考察してきた．特異（非正則）ラグランジュ関数から生ずる内的拘束条件には，第1類拘束と第2類拘束がある．第1類拘束は局所的ゲージ変換と密接に関連し，ゲージ変換の生成母関数はすべてそれらの1次結合で表されることを示した．また，第2類拘束（必ず偶数個存在）は，対になって位相空間での力学的自由度を縮減すること，そして，その縮減位相空間ではポアソン括弧に替わりディラック括弧が登場した．次に第1類拘束ばかりでなく，第2類拘束はの1次結合は大域的（全体的）な対称性変換の生成母関数となることを示した．そして，ゲージ固定条件は運動方程式と整合的であるためには，拘束条件と同じく，時間的に定常でなければならない．そのために，ゲージ固定はすべてを任意に取ることができなく，かなり制限されることを示した．

ラグランジュ関数が存在しないときの運動方程式系のゲージ変換

ここで一言付け加えておきたいことがある．これらゲージ変換，または大域的対称性変換による力学系の不変性は，ラグランジュ関数（あるいは作用積分）を準不変にすることに基づいて証明した．つまり，本書で扱った力学系はすべてラグランジュ関数の存在する力学系であった．しかし，一般的には，運動方程式が与えられた場合，その方程式を導くラグランジュ関数が存在しないことがある（ラグランジュ関数が存在するための必要十分条件は知られている）．ラグランジュ関数が存在しない場合でも，それら**運動方程式を不変にするような任意関数を含む変換も，ゲージ変換と言うことができる**．

ゲージ変換をこのように拡張すると，さらに広い枠組みでのゲージ理論を考察する必要があるが，本書では省略した．

一組の運動方程式が互いに独立でなく，そのヘシアン行列（力学変数の2階時間微

分の係数のつくる行列）が非正則のとき，ラグランジュ関数が存在しない場合でも，第9章で展開した速度位相空間で定式化した方法はかなり通用する．そして，ゲージ変換の生成子を構成する方法はある．しかし，一般化運動量の定義が確立されてないので，位相空間の議論は出来ない．

（運動方程式が与えられたとき，それを導くラグランジュ関数が存在するための必要かつ十分条件と，その条件が満たされるとき，そのラグランジュ関数を求める処方については文献1を参照.）

本書では，主として古典力学の範囲で拘束系の力学を定式化してきたが，その量子化については僅かに触れただけである．量子化への移行は，力学変数の間のポアソン括弧を正しく定めることが不可欠である．第7章で触れたように，正しく選ばれた正準変数の間に括弧式が一たび正しく設定されれば，その括弧式をそのまま交換関係で置き換えれば量子化できる．拘束条件のある系では，力学変数間の正しい関係はディラック括弧式によって定式化されることが分かった．それゆえ，本書で展開した拘束系の解析力学は量子化のための基礎的準備である．特に，ゲージ理論の量子化は厄介な問題があり，いろいろ矛盾が起こった．その原因の一端はディラック括弧を用いないためであった．それゆえ，拘束系の解析力学を正しく理解することは大切なことである．

ゲージ理論の意義

これ以降では，多少主観的判断を交えて，ゲージ理論について思うところを述べる．

ゲージ（gauge）とは長さ尺度の意味である．その「ゲージ」という概念を，一般相対性理論を通して，最初に物理学に導入したのはH. ワイルであった．一般相対性理論における座標の選び方の任意性を一般化して，長さの尺度を任意に選ぶことができる自由度としてゲージ概念が導入された．しかしその後，その概念は拡張されて，場の理論ではゲージ対称性やゲージ場というように，素粒子論でも使われるようになった．

第7章以降しばしば登場したように，電磁気学のマクスウエル理論は特別な不変性を有する．すなわち各時空点ごとに電磁ポテンシャルを連続的に任意に変換しても理論は不変である．この特性は，物理的に非常に重要な意味を持っている．それゆえ，この各時空点での連続的任意変換（任意関数を含む変換）のもとでの理論の不変性を一般の場に拡張したものを，ゲージ対称性（局所的対称性）といい，そのような理論

をゲージ理論と名付けた．

任意関数を含む連続変換で，理論が不変，つまり作用積分が準不変ということは，そのラグランジュ関数がかなり特殊な構造をしているわけである．電磁場の場合，電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ を時空の各点で連続的に任意にずらしてもよいというわけである．通常の力学では，エネルギーの絶対値は物理的に意味がないので，ポテンシャルの基準はどこにとってもよく，全空間にわたり一斉に一定値だけずらしても物理的には何の効果もないことは周知の事実である．しかし，空間の各点でポテンシャルの基準を勝手にずらして選んだのでは，エネルギー保存則は満たされず，力学理論は滅茶苦茶になってしまう．ところが，ゲージ変換を許す電磁場の理論では，ポテンシャルの基準を各時空点で任意に選んでも，エネルギー保存則なども満たされて辻褄が合うようになっているのであるから，特殊な理論構造をしていなければならない（図12.1 参照）．つまり，**ゲージ理論は特別に制約された理論構造をしていて，ある程度形式が決まってしまう．**

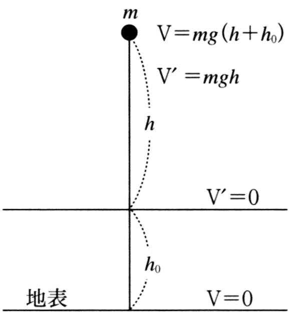


図 12.1 a　ポテンシャル基準は同一の高さならどこに選んでもよい．

ゲージ不変な理論に対する制約は，前章までに述べたように，そのラグランジュ関数が第 1 類拘束条件を内包しているということであった．

ゲージ変換を電磁場だけ見ていたのでは理論のゲージ不変性はそれ程興味ある物理的結果をもたらさないが，電子などの電荷を有する物質場を含めた体系を扱うとき，さらに一層重要な意義を持ってくる．ゲージ不変性という理論的な制約によって，荷電粒子と電磁場の相互作用の形式が決まってしまうのである．このように，ゲージ変

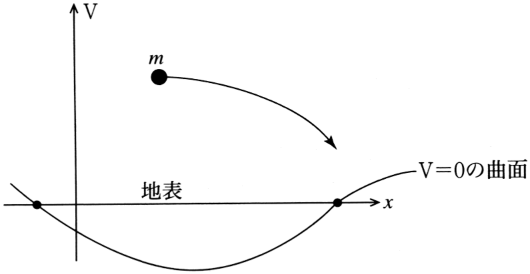


図 12.1 b　通常の力学ではエネルギー保存則が破れる．

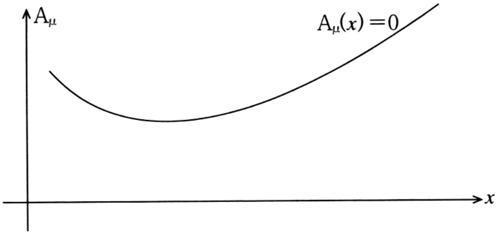


図 12.1 c　ゲージ理論では基準は各時空点で任意に選んでよい．

換に関する不変性は，物理的には重要な意味を有し，そして大変驚くべき特性なのである．

さらに注目すべき事実は，ゲージ不変な理論は電磁場だけでなく，素粒子・クォークに働く強い相互作用や弱い相互作用といった基本的相互作用もゲージ不変な理論であることがわかったことである．現在では重力場の理論も含めて，すべての基本的相互作用（強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用，重力相互作用）に関する場の理論はすべてゲージ不変な理論であることが解明されている．

これら基本相互作用（力）はこの自然界における役割が違うために，それらが発現する現象も異なり，それが発見された時代もばらばらであった．したがって，それらは互いに独立無関係なものと最初は見られていた．しかし現代では，**一見全く別物と思われていた4種の基本相互作用は相互に密接な関連があり，源は一つのゲージ不変な相互作用であると考えられるようになった**．そうして宇宙のビッグ・バン初期に，

自然界の対称性が破れたとき，この基本相互作用も分岐して４種類の異なる相互作用になったのだと推測されている．これが相互作用の統一理論と呼ばれているものである．まず，最初に電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論がワインバーグ-サラムによって築かれ，実験的にも確立されて標準理論となった(2)．次に，その弱電相互作用に強い相互作用も含めて３種相互作用の大統一理論がジョージ-グラショウらによって提唱された(3)．さらに，重力を含めた統一理論は超重力理論と呼ばれ，「紐理論」が有力なモデルとされていた．最終的なこの統一理論はまだ理論的にも実験的にも確立されていないが，大変魅力的な着想であり，物質と相互作用の存在様式に関する物理学と自然観の転換をもたらした．

素粒子間の基本的相互作用はゲージ場を媒介とすることが認識されるまで，相互作用の性質やその数学的表式はさまざまであって，それらを決める統一的原理がなかった．そのために，それぞれ相互作用の形を素粒子反応の現象から実験に基づいて試行錯誤的に決定していた．ところが基本的相互作用はゲージ理論を用いて記述されるだろうとのアイデアが現れた．この考えを唱えたのはヤン-ミルス，及び内山である．ゲージ理論は特殊な理論構造をしているので，その制約によって相互作用の数学的表式が決まってしまう．それゆえ，**ゲージ理論をもって相互作用を決定する原理となしうるであろうというのであった．この発想も大変素晴らしいものである．**

対称性とゲージ変換

ここで素粒子理論において重要な意味を持つ「対称性」について簡単に説明しておこう．

力学における対称性という概念は，ネーターの定理のところで触れたように，ラグランジュ関数を準不変にする変換が一つの対称性を表し，それがまた一つの保存則と結びついていた．そのときの対称性は主として，時空の幾何学的対称性であった．

この対称性の概念をさらに拡張して，素粒子論では粒子の入れ換えや，数式の変換にも適用するのである．素粒子論の場合，類似の粒子の集合を考え，その集合に属する素粒子の種類を入れ換えても理論全体が不変になっているとき，その入れ換え操作に対して理論は対称的である，あるいは対称性を有するという．例えば，陽子 p と中性子 n とは電気を帯びているかいないかの違いのみで他の全ての性質は同じである．そうして核力の性質は p と n について対称的であり，核力理論は p と n を入れ換えても変わらない．これを荷電スピン対称性という．素粒子論にはこれ以外にもいろい

ろな対称性があるが，中でもゲージ対称性は非常に重要である．

数式の変換の例は，ニュートン力学がガリレイ変換に対して不変であり，特殊相対性理論はローレンツ変換に含まれる種々な対称性を有することである．

一般にゲージ理論には必ずある種の対称性があり，その対称性にはやはり保存則が結び付いている．電磁場の時は荷電粒子の波動関数の位相変換 ($\psi \to \psi^{i\epsilon}$) がこの対称性であり，電荷の保存則がそれに対応する保存則である．その対称性は，通常の理論では，クォーク・軽粒子などの「物質場」の方が担っている．例えば，クォークは6種類の u，d，s，c，b，t が発見されているが，それぞれのクォークには，さらにまた赤，緑，青の３つの「色荷」があり（これはクォークに色があるわけではなく，３種を区別するための符号である)，計 18 個ある．３色の u クォークは色荷以外の性質は全く同じで区別がなく，３色のクォークに対して理論は完全に対称的になっているので，３つの色クォークを入れ替えても理論は不変にできている．他の d，s などについても同様である．この対称性を数学の $SU(3)$（３次元特殊ユニタリー群）色対称性という．この３は３色のクォークを表す．

このような対称性があるとき，クォークの波動関数の位相変換の際に，位相ばかりでなく色荷の入れ替えも同時に行う変換を考えることができる．３色のクォークの入れ替えは，自分自身との入れ替えも含めて９通りあるが，そのうち１つは独立なものとみなさない（これが「特殊」という理由である）ので，８通りの入れ替えを考える．第８章，例題 8.3 のヤン-ミルス場 $A^a_\mu(x)$ の a はクォーク理論の場合，この８通りの色荷の入れ替えの数に対応して $1 \sim 8$ である（ゲージ場の数が８個)．このゲージ変換は３行３列の行列で表される．クォークと相互作用するこのゲージ場をグルーオン (膠粒子) と呼んでいる．

３個のクォークの入れ替えとクォーク波動関数の位相変換を同時に行う合成された局所変換には８個の任意関数 ($\epsilon^\alpha(x)$) が現れるのである．すると，入れ替えを含めた合成位相変換から出てくるお釣りの項（波動関数の微分のために位相変換の結果生ずる）を全部打ち消して運動方程式を元の形に戻すには，８個のゲージ場とそれら８個の局所ゲージ変換が必要なのである．

一般にゲージ変換を２回続けて行うとき，変換の順序を入れ替えると結果が変わる．その理由は行列の掛け算は順序を入れ替えると答が変わるからである．このように，２つのゲージ変換の順序を変えると結果が違うようなものを非可換ゲージ変換といい，その理論を非可換ゲージ理論という．それに対して，電磁場のゲージ変換

(ゲージ自由度が１) は一通りしかないので，順序を入れ換えても結果は変わらない．これは可換ゲージ変換である．

一般に２つ以上の物質場が１つの対称性（対称群）を有するとき，ゲージ変換は $n \times n$ 行列 $(n \geq 2)$ で表されるので，それに対応するゲージ理論は全て非可換ゲージ理論となる．

相互作用の性質に関して，可換ゲージ場と非可換ゲージ場との大きな違いは，ゲージ場同士の相互作用があるかないかである．電磁気理論のゲージ場である光子は電荷を帯びてないので，光子と光子が直接相互作用することはない．ところが，非可換ゲージ場の場合，物質場の帯びている「荷電」をゲージ場自身が帯びているのである．そのために，相互作用を媒介するゲージ場同士が同じ相互作用をするのである．例えば，クォーク間に働く色ゲージ場（グルーオン）は，グルーオン自身がクォークと同じく色荷を帯びているので，グルーオン同士直接相互作用をする．そのために，可換ゲージ場（電磁場）とは異なる物理的現象が現れる．クォークの漸近自由性（短距離で相互作用が弱くなること）はその一例である．

物質場とゲージ場の相互規定性

このように，ゲージ理論は物質場とゲージ場とからなっている．ゲージ理論が可換か非可換かという性質やゲージ場の数などを決定するのは，物質場の対称性である．物質場に一つの対称性があればそれに対応して，物質場を入れ替える変換のもとで理論は不変である．物質場の入れ替えと位相変換を合わせた合成変換を全時空間で一斉に揃えて行うものを全体的（非局所的）変換，または大域的変換という．**この全体的位相変換を拡張して時空間の任意関数で置き換え，各時空間ごとに勝手な局所ゲージ変換を考えることができる．するとその物質場の局所ゲージ変換に対応したゲージ場を導入することにより，ゲージ理論ができるのである．これを全体的対称性の局所ゲージ化という**．したがって，物質場の全体的対称性を与えれば，あとは自動的にその対称性に見合うゲージ理論を作りうる仕組みになっている．その局所ゲージ化の仕組みの一般論を示したのは内山である[(4)]．

この事実はゲージ理論の重要な特性である．なぜならば，ゲージ場は相互作用を媒介する（つくり出す）場なので，基礎的相互作用の性質は物質場の対称性で決まってしまうからである．つまり，どのような「基礎的相互作用」が存在するかは基本的物質場のあり方（対称性）で決まるという仕組になっているのである．となると，結局

のところ，**自然界における「相互作用（力)」の存在様式の根源は物質場の対称性であるということになる.**

ただし，残念なことに，物質場の対称性を決定する原理がまだ見い出されてない．目下のところ，自然界に存在する粒子の種類とその性質を実験的に求めるしか方法がないのである.

このようにゲージ理論は物質場の対称性がゲージ場の性質を決め，逆にゲージ場が物質場に働く「力」を規定するという相互依存の形式に一応はなっている．しかし，その相互依存の関係は完全ではない．なぜならば，すでに指摘したように，**物質場の対称性を決める原理がなく，実験的にえた外からの情報をもとにして与えねばならないし**，また対称性さえあれば物質場は無くとも，ゲージ場のみでその性質は論理的には定められ，ゲージ場の理論を構成しうるようになっているからである．つまり，「**初めに対称性ありき**」というわけである．それゆえ，物質場とゲージ場との相互依存性（相互規定性）は完全ではない.

この点では，一般相対性理論における物質と時空間の相互規定の理論構造は見事である．アインシュタインの重力理論で非常に重要なことは，重力方程式の左辺の曲率テンソル（時空の幾何学的性質を決める）と右辺のエネルギー・運動量テンソル（物質分布）とが，互いに相手の状態を規定し合っているということである．重力方程式は次ぎのような構造をしている：

（曲率テンソル-時空間の性質）＝（物質のエネルギー・運動量分布）

左辺の曲率テンソル，すなわち時空間の幾何学的性質（構造）は右辺の物質分布により決まり，逆に中味の物質分布は時空間の歪み（重力）によって変わていく．その結果，物質分布の変化につれて左辺の時空間の性質が変わる．このように，入れ物の時空間と中身の物質の状態は互いに持ちつ持たれつの関係にあって，自己発展していくというのである．これを全空間に押し拡げれば，宇宙の自己運動の仕組みとなる．この重力場の理論と比較して，物質場とゲージ場との相互規定性は不完全といえるであろう.

自然は，その存在の仕方として，対立する２つの要素（物質と時空，あるいは物質場とゲージ場）が相互に持ちつ持たれつしつつ自己発展するシステム的構造になっているのではないかと筆者は想像している．自然界の発展進化は，外部からの作用によ

るものではなく，宇宙は生成以来，それ自体の構成要素間の相互作用によって自律系として自己組織化が進み自己発展してきたはずである．したがって，それら構成要素間の相互作用は，互いに他の存在様式を規定するという完全に相互規定的な性格のものであろう．すると，自然界の存在様式と自己発展の仕組みは，自己完結的な構造になっているとはずである．ゲージ理論が自然の仕組みを決める原理の一つであるならば，この宇宙におけるゲージ対称性も，その自己完結的な仕組みによって決まるはずである．もしそうならば，**物質場とゲージ場とが互いに他の存在を前提として相互に規定し合い，その存在様式をも決定するようなゲージ理論があるはずである．そのような理論は，ゲージ対称性（ゲージ群のタイプ）や理論構造もその中で決まるような仕組みになっているであろう．**

物質の接続場としてのゲージ場

そのことは別にして，全体的対称性のゲージ化の意味をもう少し詳しく見てみよう．ゲージ変換とゲージ場というものは次ぎのように解釈できるだろう．話を分かり易くするためにクォークの「色対称性」を例にとろう．対称性のゆえに，３種類の色クォーク，赤緑青をどのように入れ替えても理論の物理的内容は変わらない．さらにその混ぜる割合も全く任意である．すなわち，時空間のある１点で色空間を考えると，その対称性空間のなかの回転はクォークの色の種類を混ぜ合わせる（入れかえる）ことを意味するが，その空間の中の勝手な軸の回りに任意の角度の回転を行っても理論は不変なのである．

そこで，この色空間のなかに一つの座標軸を決めることは，どのクォークがどの色を持つかを決めることに対応する．いまある時空間の一点で色空間の向きを定めて，その時空点でのクォークの色荷を決めたとしよう．だが他の時空点での色空間の向きをこれに合わせて揃える必要はない．なぜならば，離れた２つの時空点での物理量を比較するには信号を送って情報を交換しなければならないが，相対性理論によると光速度以上の信号はないから時間がかかる．だから，色空間の向き（クォークの色の指定）を全空間に亘り同時に一斉に揃えることはできないと考えるべきだろう．それよりもむしろ，最初は色空間の向きは各時空点でばらばらであって，後から順に向きを揃えて，その結果クォークの色荷をどこで観測しても，赤クォークはいつどこででも赤クォークであるように調整されていると見る方が理にかなっているだろう．

物質場の位相と色空間の座標軸の向きは各時空点ごとに任意に取れるから，そこ

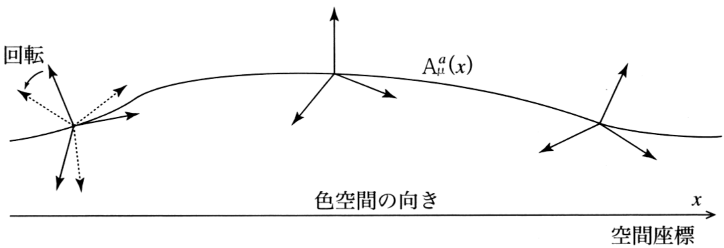


図 12.2　各空間点における色空間の向きのずれをゲージ場 $A_\mu^a(x)$ が埋め合わせて色荷の保存を調整

で，ある時空点で物質場の位相と色空間の向きを変える変換をおこなったとしよう．この変換の効果は瞬間的に全時空間に波及しえないので，その変換以前に全時空間の各点でクォークの位相と色空間の向きがたとえうまく揃っていたとしても，この変換によって離れたところでの位相と色空間の向きはずれてしまう．このような変換を各時空点ごとに任意に許すと，色空間の向きと位相は変換後ばらばらになってしまう．ところがクォークの色荷を決める規準は色空間の向きであるから，そうすると各時空点ごとに色荷の規準がばらばらになり，ある所で赤クォークであるものが，他の所では緑クォークとして観測されたりすることになる．これでは全体系として整合的な理論となりえないし，各時空点で色荷を決める規準が違うので全体で色荷の保存則も成り立たない（力学のポテンシャルの基準を場所ごとに勝手に決めるとエネルギー保存則が破れるのと同じ）．そこで各時空点での色荷の不統一を調整して色荷が保存するような役目をするものが必要になる．その役を果たしてくれるのがゲージ場（グルーオン）なのである (4)(5)．その仕組みが，整合的な自然法則が存在しうるためには必要である．

その理由は先に説明したように，物質場の合成位相変換（色荷の変化も含む）の効果を打ち消すのがゲージ場のゲージ変換であるから，各時空点ごとでばらばらになった物質場の位相と色空間の向きの食い違いを埋め合わせ，帳尻を旨く合わせることで滑らかに繋がるようにしてくれるのがゲージ場というわけである．つまり，**各時空点で勝手に取りうる物質場の位相と色荷などを旨く調節して，全体として整合的な理論体系を作るための一種の接着剤のようなものがゲージ場である．この意味でゲージ**

場は接続場とも呼ばれる．これがゲージ場の幾何学的解釈である．この観点からすれば，物質場の対称性を表す内部空間（色空間，荷電空間など）と外部空間（時間・空間）とを関連づけているのがゲージ場であるということもできる．

時空の各点での色空間（一般的には対称性空間）の向きを滑らかに繋ぐと局面ができるが，その様相は一般相対性理論で，局所ローレンツ系を滑らかに繋いでできる歪んだ空間の局面と似たものである．このような空間を扱う数学は接続の幾何学と呼ばれ，その空間での微分は共変微分という理論が用いられる．ゲージ場はそのような共変微分を定式化するときに必要なのである．

科学の客観性と人為的選択の排除

物理法則，あるいは物理理論が，ある変換のもとで不変であるということは，その理論の普遍性と客観性を示す重要な指標の一つである．

たとえば，力学法則は基準座標系を定めて，その座標系の上で記述されるが，観測者ごとに異なる座標系が存在すると考えてよいから，座標系は原理的には無限に存在するとみなせる．だが，物理法則とそれから導かれる結果は座標系の取り方（観測者）によらずに成立しなければ，その理論は普遍的といえない．なぜならば，特定の座標系のみで成り立つ法則はその座標系に乗った人に対してのみ成り立つことになり，他の人には通用しないので，それは主観的法則であって普遍法則とはいえないからである．そのことは，不動の地球が宇宙の中心であるとして築かれた近代科学以前の法則は，人間中心の主観的法則であったことを思い出せば十分であろう．したがって，物理法則が客観性と普遍性を有するために必要な条件は，その法則を記述するすべての座標系で共通に成り立つことである．そのことを座標変換で表すと，それら座標系を結ぶ座標変換のもとでその法則が変らないということである．この不変性はその理論が整合性を保つためにも必要である．

物理法則が座標変換によって不変ということは，その基本法則の数学的表現が座標変換によってその形式を変えないことである．ニュートン力学の場合は，３つの基本法則，すなわち慣性法則，運動方程式，および作用-反作用の法則がすべての慣性系で成り立つ（同じ形式をとる）こと，特に，運動方程式はその式の形が変らないことである．このときの座標変換は，よく知られたガリレイ変換である．特殊相対性理論の場合はローレンツ変換である．

このように，**変換に対する法則の不変性はその理論の客観性の反映**である．した

がって，より広い不変性を見い出すことは，それだけその理論の客観性と普遍性が増すことになる．力学の場合には，地球中心の特殊な基準系から，すべての慣性系で成り立つ物理法則（最初ガリレイ変換，次にローレンツ変換で不変な法則）へ，さらに任意の加速度系で成り立つ一般相対性理論（一般座標変換で不変な法則）へと，科学者は次々により広い変換性のもとで不変な理論を求めてきた．

このように，物理学は客観性を獲得するための方法とその論理的根拠を徐々に編み出しつつ，可能な限り客観的理論体系を築いてきた．

自然科学は人類が自然からの情報を基に築いた構成物であるが，自然の理解が不完全であるために，最初のうちはその理論形式の中に形而上学的概念や人為的な要素が採り入れられてきた．しかし，本来，自然法則は人間が考えた記述の仕方に依らない，つまり座標系の取り方や物理量の表現形式に依らないはずである．この点で，座標系間の相対運動を等速度に限る慣性系はまだ特殊な基準系であり，人間が便宜的に選んだものであるから，まだ人為的選択の性格を残している．したがって，任意の座標系で成り立つ法則が望ましい．その意味で**慣性系から，加速度系を含めた任意座標系を許す一般相対性理論への拡張は，人為的選択の要素を科学理論から排除して客観性と普遍性を目指す物理学としては当然の要請であった．**

ゲージ理論もまた，人為的性格を排除し客観的物理法則を追究するもう一つの流れに入るといえるであろう．空間スケールやポテンシャルの基準には絶対的な物理的意味はなく，その選択は人為的なものであるから，**ゲージ場の理論はポテンシャルの基準についてその人為的な要素を排除したことになる．**

ゲージ不変な場の理論は，特殊な理論構造をしていて，任意性がほとんどない．そして，理論形式は決まっていて，相互作用の結合定数と対称性群の構造定数以外にパラメータの入る余地はない．つまり，対称性の型以外は人為的に操作したり，任意に選択できる余地はほとんどないから，この点でも人為的要素が排除されているということもできる．

実証科学としての自然科学といえども，最初から経験事実に基づく実証性のある概念や原理・法則だけで理論が構成されてきたわけではない．近代科学にも絶対時空や慣性系などの形而上学的概念や人為的主観的仮定（不変不滅の原子）などが理論のなかに取り込まれていた．しかし，自然科学の進展とともにそれら形而上学的概念や人為的要素を，上記の例のように一つ一つ排除して，自然科学はできる限り客観性を獲得してきたのである．

ちなみに言うと，広い変換性と不変性を有する理論は，客観性と普遍性が増大するばかりでなく，簡潔さと美しさが増す．繁雑な式は汚く不変性にも欠けている．簡潔で美しい理論ほど真理を反映しているといわれるのは，広い変換のもとでの不変な理論ほど客観性を有し，そして人為的な選択要素が排除されているからであろう．

自然はなぜゲージ理論を選んだのか

先に述べたように，４種の基本的相互作用は元を正せばすべてゲージ変換に対して不変である．自然はなぜゲージ不変な相互作用を選んだのであろうか．これは大変難しい問題である．物質はなぜ相互作用をするのかという問いに答えられないように，その疑問には現代科学はまだ答えられない．

それにしても，相互作用がなければ，物質の運動ばかりでなく，物質の性質（属性）やその存在すら認識できない．したがって，全然相互作用しない「あるもの」が在ったとしても，それを永遠に感知できないから，それは物質ではない．

物質場とゲージ場の相互規定性のところで述べたように，物質場にある種の対称性があれば，それに対応したゲージ場が存在する．しかし，その物質場の存在と，その対称性を認識できるのはゲージ場を媒介とする相互作用を通してである．したがって，その意味では，物質場の対称性（性質）はゲージ場によって生みだされると見ることもできる．それゆえ，物質場の対称性が先かゲージ場が先か決めかねる．これは「鶏と卵」のようなものであろう．

時空的に離れた物質場が，互いに相手が自分と同じ対称性のグループに属するか否かの判定は相互作用によらねばならない．つまり，**物質場がいかなる対称性を有するかは相互作用によらねば決まらないが，その相互作用を生みだすのが接続場としてのゲージ場であると理解される．それゆえ，先の考察からして，ゲージ場の理論は相互作用のあり方として自然な理論構造といえるであろう．**

それにしても，ゲージ理論には，拘束条件の数だけの非物理的な自由度，すなわち余分な成分の変数が入っている．その余分な変数を除くために，ゲージ固定条件を与えねばならない．しかも，ゲージ固定によって，ゲージ不変性は破れるわけである．その上，以下に述べるように，基本相互作用のゲージ対称性は，その一部が破れているのである．これは随分複雑で持って廻ったような手間の掛かる仕組みである．

力学理論としては不必要な成分変数を持ち込むような無駄なことを，なぜ自然は選んだのであろうか．自然の本質はシンプルなものだというのは，人間の主観的な願望

なのだろうか．それとも，ゲージ理論のこのような複雑さは，人間の智慧がまだ不完全なためであって，真相はもっと単純な理論が存在するのであろうか．

相互作用の統一理論によれば，元は一つであった大対称性が破れて小さな対称性に分解すると同時に，一つの基本相互作用が４種の基礎的相互作用に分岐したというわけである．そのとき，元の大対称性に対応するゲージ不変性を破るのは，ヒグス場というスカラー場である．ヒグス場もある対称性を有するが，ヒグス場の対称性が自発的に破れて（外部からの作用でなく，自らの力学的機構によって対称性が破れること），その一部の成分がボーズ凝縮というものを起こして，真空が相転移するとするのである．このヒグス場のボーズ凝縮により，ゲージ対称性が破れて物質場とゲージ場が質量を獲得するという仕組みになっている．すなわち，ヒグス場はゲージ対称性を破るゲージ固定の役をしているのである．（詳しくは統一理論の解説書を参照されたい）．

現代の場の理論では，上述のように，物質場とゲージ場は相互に規定し合う対立物として，ゲージ理論の枠内に存在根拠が在る．ところが，そのヒグス場は物質場でもゲージ場でもなく，ゲージ理論の枠内に自然に納まる場所がない，つまりその存在原理がないのである．それゆえ，ヒグス場はゲージ理論にとっては外から持ち込まれた異端者である．しかも，ヒグス場の自発的対称性の破れというのも仮定であって，なぜヒグス場の特定の成分がボーズ凝縮を起こすのか，その機構はまだ分かってない．要するに，ヒグス場に疑問のすべてを皺寄せして，問題を先に延ばしているわけである．それゆえヒグス場の存在根拠を与える原理が求められるのである．

以上のことを考慮すると，ゲージ理論だけ見ても不完全であって，まだまだ改良発展する余地があるだろう．

対称性の破れについて

対称性の自発的破れについて，大変興味深くかつ重要なものとして南部-ゴールドストーンの定理というものがある．**対称性が自発的に破れるとき，質量ゼロのボーズ粒子（中間子）が出現する**ことが，最初南部により示され，後にゴールドストーンがそれを一般化したものである．

南部・ゴールドストーンの定理の意味は，次のように解釈できるであろう．熱力学には平行移動の法則（ルシャトリエ-ブラウンの法則）というものがある．それは，一**般的にある平衡状態（定常状態）を破ろうとする作用が働くと，その作用に逆らって**

（その作用を打ち消そうとして）定常状態を持続しようとする効果，つまり広い意味の「慣性」が働くというものである．南部-ゴールドストーンの定理はこの効果と本質的に類似のものである．

つまり，対称性が破れるときにボゾンが現れることは，励起エネルギーのモードが出現するわけであるから，高いエネルギー状態に移行するこの現象は対称性の破れ（定常状態の否定）に逆らう効果の一種とみなせる．

このような定常状態を破る作用に抵抗する効果は，自然界の運動・変化に関する基礎的機構として広くみられるものである．その例として，力学における物質の「慣性」がある．等速直線運動（定常状態）をしている物体に力を働かせて加速しようとすると，その加速に逆らう効果が物質の慣性である．慣性は等速運動を維持しようとする物質の属性である．もし，慣性がなければ，無限小の力で，無限大の加速度が生じ，秩序ある自然界は存在しない．また，電磁誘導のレンツの法則，磁束密度の変化を妨げる方向の起電力の生成がある．コイルと磁石の相対運動で，磁石が近づく（あるいは遠退く）のを妨げるようにコイルに電流が流れる．自己誘導もその例である．前に挙げた平行移動の法則（ルシャトリエ・ブラウンの法則）の例は，氷に圧力を掛けると氷が溶けるが，それは圧力の働きを弱める効果と見なせる．また，酸とアルカリの中和状態を破ろうとする作用に対して，その作用を打ち消す効果が瞬間的に系の内部に現れる．これら「慣性」効果のゆえに自然は秩序を保ちつつ変化するのである．

これらの効果は自発的な破れの効果ではないが，**定常状態を破ろうとすると，その作用に逆らって定常状態を持続しようとする効果，つまり広い意味の「慣性」という点では共通している．**

南部-ゴールドストーンの定理の場合も，自発的対称性の破れは最初の定常状態にあった基本物質の存在様式（対称性）を否定する内部作用であり，そのときボゾン（中間子）が現れることは対称性の破れを否定しようとする効果と見なせるというわけである．

このように対称性の破れに対してボゾンが出現するとなると，いろいろな中間子が存在することになる．核力の π 中間子は，核子-核子相互作用のカイラル対称性が自発的に破れたことにより現れることを南部-ジョナ・ラジニオが最初に示した（π 中間子は質量を有するが，その質量の由来は別の理由による）．

ゲージ対称性の自発的破れの場合にも南部-ゴールドストーンの定理は適用される．

重力理論は，非線形相互作用と運動量の非線形拘束条件から生ずる量子化異常（9.3節参照）によりゲージ対称性が破れるが，そのゲージ対称性の破れにより南部-ゴールドストーンボゾンが生ずれば，そのボゾンは宇宙に多量に存在する正体不明の暗黒物質，あるいは暗黒エネルギーと関係があるのではなかろうか．暗黒物質は重力以外に作用が観測されていないので，その相互作用は非常に弱いようであるから．

いずれにせよ，考えれば考えるほど自然界には思いも寄らぬ面白い現象がまだまだあるだろう．

文献

(1) H. Kamo and R. Sugano, Ann. Phys. **128** (1980), 298.
木村利栄・菅野礼司『微分形式による解析力学』改訂増補版（吉岡書店 1996）第３，７章

(2) S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, No. 1 (1967),
A. Salam, Elementary Particle Theory, ed. by N. Svartholm, (Jhon Wily and Sons, Inc., New York, London, Sidney, 1968),

(3) H. Georgi and S.J. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, No. 8 (1974),

(4) R. Utiyama, Phys. Rev. **101** (1956),
内山龍雄『物理学はどこまで進んだか』(岩波現代選書 1983),

(5) C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96** (1954),

(6) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **112** (1961) 345,
J. Goldstone, Nuov. Cim. **19** (1961) 154.

さらに進んだゲージ場の理論を学びたい人には，次の文献を勧めます．

(1) 九後汰一郎『ゲージ場の量子論』(培風館 1989),

(2) 藤川和男『ゲージ場の理論』(岩波講座「現代の物理学」1993)

索引

数字／記号　行

１次拘束条件　36, 86
２次拘束条件　36, 89
３次拘束　109
４次元座標　79
H_E 形式　182
H_T 形式　183
$SU(3)$ 対称性　222
$U(1)$ 対称性　151

あ　行

アーベル（可換）群　212
位相空間　14, 15, 19
　——の縮減　98
　——への写像　157
位相変換　222
一般化力　8
一般座標変換　2
一般相対性理論　224
運動の生成演算子　42, 64, 82
オイラー微分　35, 126

か　行

外的拘束条件　3
外的制約条件　192
外部空間　227
カイラル $U(1)_s$ 対称性変換　151
可換ゲージ変換　223
拡張されたハミルトン関数　182
荷電スピン対称性　221
荷電フェルミ粒子　148
ガリレイ変換　33, 222
完全積分可能性　63
観測可能な物理量　177
観測可能量　108
基本的相互作用　220
基本変分式　14, 19, 82
共変微分　227
共役な運動量　14
局所ゲージ化　223
クーロンゲージ　195
クォーク　222
グルーオン　222
経路積分　175
ゲージ　107, 218
　——関数　114
　局所——化　→ 局所ゲージ化
　クーロン——　→ クーロンゲージ
　——群　205, 206
　——固定　184, 230
　　——条件　192
　——自由度　107, 114, 183, 184
　——対称性　218
　——不変な系　34
　——不変量　177
　——変換　34
　　可換——　→ 可換ゲージ変換
　　——の（生成）母関数　110, 113, 115
　——理論　3, 107
交換関係　102
交換子積　45
高次拘束条件　113, 124
拘束条件　3

1次—— → 1次拘束条件
2次—— → 2次拘束条件
外的—— → 外的拘束条件
高次—— → 高次拘束条件
内的—— → 内的拘束条件

さ 行

最小作用の原理 2, 6
作用積分 2, 7
色荷 222
色対称性 222
質量のあるヤン-ミルス場 145
自発的対称性の破れ 230
弱電相互作用 221
弱等式 88
自由度 3
重力場 176
循環座標 31, 73
準不変 32
人為的な要素 228
シンプレクティク変換 51
整合性条件 160
正準共役 41
——な変数 19
正準形式 2
正準変換 2, 47
——の不変式 55
——の母関数 49
正準変数 19
正準方程式 24, 41
生成系 62
積分可能条件 60, 61, 160
接続場 227
絶対積分不変式 57
全体的対称性 223
全ハミルトン関数 88
相互依存 224
相互規定 224
相互作用の統一理論 221
相互作用を決定する原理 221
相対積分不変式 56
速度位相空間 15
束縛力 9
素粒子論 221

た 行

第1積分 59
大域的変換 136
——の母関数 142
対称性 221
$U(1)$—— → $U(1)$ 対称性
荷電スピン—— → 荷電スピン対称性
ゲージ—— → ゲージ対称性
色—— → 色対称性
全体的—— → 全体的対称性
内部—— → 内部対称性
大統一理論 221
直交変換 52
定常条件 89, 112
ディラック括弧 96
——の定常性 202
ディラックの予想 124
停留値原理 10
電磁場 79
特性関数 17
閉じた生成系 66

な 行

内的拘束条件 3, 16
内部空間 227
内部対称性 79
ネーターの第1定理 30
ネーターの第2定理 35
ネーターの定理 27
——の逆 178

は 行

ハミルトン形式 2, 19

ハミルトンの原理　7
ハミルトンの主関数　75
ハミルトンの正準方程式　24
ハミルトン-ヤコビ方程式　59, 75
非アーベル（非可換）ゲージ群　213
非可換ゲージ変換　222
ヒグス場　230
微小正準変換　53
非ホロノーム系　4
紐理論　221
標準理論　221
物質場　222
　——の対称性　223
物理的状態　108
物理量　108
フロベニウスの定理　63
ヘッシアン行列　16, 83
　——の階数　21
変換群　131, 206
変分法　2
ポアソン括弧式　42
ポアンカレの積分不変式　56
包含の関係　72
ホロノーム系　4
ホロノーム拘束条件　85

ま　行

マクスウエルの電磁気理論　38
モーペルテューイの原理　2

や　行

ヤン-ミルス場　79

ら　行

ラグランジュ括弧式　45
ラグランジュ関数　9
　——の不定性　10
　——密度　80
ラグランジュ形式　2, 15
ラグランジュ方程式　10
リー環　44, 96
力学系のエネルギー　25
力学的特性関数　2
リュヴィユの定理　58
量子異常　154, 175
量子化　103
理論の客観性　227
ルジャンドル変換　23
ローレンツ変換　222

著者履歴

菅野　礼司（すがの　れいじ）（理学博士）

1954年：京都大学理学部物理学科卒業

1959年：京都大学理学研究科博士課程卒業

1959～60年：湯川奨学生として基礎物理学研究所で研究

1960年：大阪市立大学理学部物理学教室助手

以後，講師，助教授，教授を経て1994年に停年退職

1994年：大阪市立大学名誉教授

専門分野：素粒子論，科学論

主要著書：『物理学の理論と方法（上,下）』（大月書店）

『相対性理論はむずかしくない』（講談社ブルーバックス）

『微分形式による特殊相対論』（丸善）

『東の科学・西の科学』（東方出版）

『力とは何か』（丸善）

『科学は「自然」をどう語ってきたか』（ミネルヴァ書房）（日刊工業新聞・技術・科学図書優秀賞授賞）

『ヴィジュアル図解相対性理論』（PHP研究所）

『微分形式による解析力学』改訂増補版（吉岡書店）

『科学はこうして発展した』（せせらぎ出版）

ゲージ理論の解析力学

2007年 6 月20日　第1刷発行
2007年 9 月25日　第2刷発行

著　者　菅　野　礼　司

発行者　吉　岡　　誠

〒606-8225 京都市左京区田中門前町87

発行所 株式会社 吉　岡　書　店

電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

ショウワドウ・イープレス株式会社・清水製本

ISBN978-4-8427-0342-8